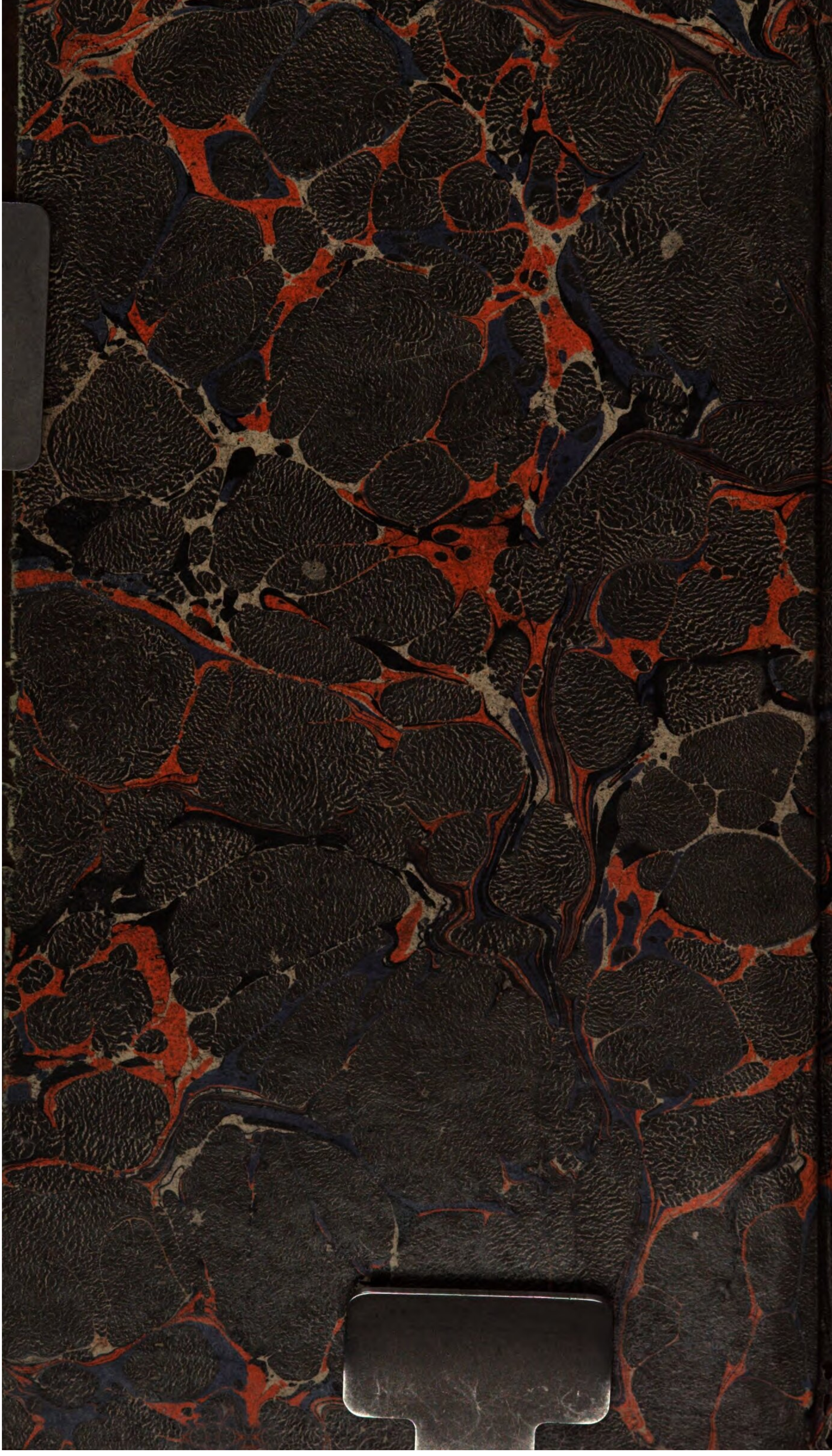


3661 Bibl. Mont

Die

höhere Geodäsie

oder

die Wissenschaft, die Reiche der Erde, und diese selbst, geographisch aufzunehmen und zu chartieren,

von

Johann Leonhard Späth,

Königlich Baierisch. Hofrath
und Professor der höhern Mathematik
zu München.

Erste Abtheilung.

Mit 4. Kupfertafeln.

München 1816.

in der E. A. Fleischmannischen Buchhandlung.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Die gemeine oder elementare Geodäsie wurde bisher in Schriften vielfältig abgehandelt, während die höhere Geodäsie, oder die Wissenschaft, die Figur und Größe der Erde zu bestimmen, große Reiche derselben geographisch aufzunehmen, und von ihnen Charten zu entwerfen, bisher unter uns Deutschen, meines Wissens, nirgends in ihrem ganzen Umfange in einem Handbuche bearbeitet, oder vorgetragen worden ist!

Diese im Fache der höhern angewandten Trigonometrie unter uns noch bestehende Lücke auszufüllen, verbunden mit den theoretischen Kenntnissen, und practischen Vortheilen und Maximen, die ich mir als Künstler, und insbesondere als vieljähriger Practiker in diesem Fache erworben und eigen gemacht habe, veranlaßten mich, diese höhere Geodäsie zu bearbeiten, um in derselben den Ingenieurs, Oberlandmessern und sämmtlich übrigen, die sich mit geographischen Messungen nach ihrem Beruf abzugeben haben, oder auch nur in derselben sich informiren wollen, ein Handbuch zu überliefern, aus welchen sie den Umfang und die Wichtigkeit ihres Geschäftskreises nicht nur erkennen, sondern auch in diesem durch Ausführung der hier aufgestellten Lehren, Vortheilen und Maximen sich perfectioniren können.

Von diesem Gesichtspunct betrachtet, konnte ich daher in diesem Handbuche die Lehren der elementaren Geodäsie ganz übergehen; welche solche Individuen an und für sich schon wissen müssen, die sich mit geographischen Messungen abgeben — ich konnte deswegen den Vortrag sogleich mit der Construction jener Fundamentalformeln beginnen, auf welchen das meiste des in der Folge vorzutragenden beruhet.

Da ferner heutzutage bey großen geographischen Messungen Instrumente angewandt werden, die an Genauigkeit jene weit übertreffen, deren man sich sonst zu diesem Behuf bediente, so kam es mir zunächst darauf an, diese Meßwerkzeuge analytisch zu betrachten, und den Grad ihrer Zuverlässigkeit sowohl, als ihre Prüfung, nach eigenen Ansichten zu beurtheilen, und anzuzeigen! Diese Instrumente nach allen ihren Bestandtheilen zerlegt in Kupfer abzubilden, hielt ich übrigens nicht für räthlich; weil jene, die sich derselben bedienen, sie an und für sich kennen, und durch Uebung gebrauchen lernen müssen; und außerdem auch der Preis dieses Handbuches dadurch beträchtlich hätte erhöhet werden müssen.

Ich begnügte mich deswegen, diese Instrumente nur nach ihren wesentlichen Stücken zu skizziren; und hatte dabey zunächst jene in Aspect, die in dem Laboratorio der Herren Utzschneider, Reichenbach und Liebherr allhier in einer Vollkommenheit verfertiget werden, welcher selbst die Instrumente der vorzüglichsten englischen Künstler nachstehen müssen; weil

weil sie auf einer von dem Königl. Salinenrath Hrn. von Reichenbach erfundenen Theilmaschine eingetheilt worden, die alle übrigen an Genauigkeit übertrift, und deswegen diesen Instrumenten den Absatz in ganz Europa verschafft hat. Der berühmte Erfinder wird die in jenem Laboratorio gefertigte Instrumente seiner Zeit selbst bekannt machen; weswegen ich demselben hier nicht vorgreifen, und mich mit einer linearen Scizze derselben begnügen wollte.

Nachdem ich nun das für den Geographen nothwendige über Winkelmesser in §. 4—10. erwogen habe, zeige ich die nach Umständen erforderliche Reductionen der mit solchen und andern Instrumenten gemessenen Winkel; und schalte nun das nöthige über polygonometrische Messungen ein, in Verbindung mit analytischen Betrachtungen über den Grad der Zuverlässigkeit bey Messung und Ziehung gerader Linien auf dem Felde und auf dem Papier; ehe ich auf die Messung einer geodätischen und astronomischen Basis mit dem mit ihr connexen selbst übergehe.

Nach Voranschickung alles dessen, schreite ich in §. 11. nun für die geographische Aufnahme eines Staates selbst vor! Ich beginne diese Betrachtungen mit der Aufnahme eines kleinen Staates, der als solcher nach verschiedenen Messungsmethoden aufgenommen und chartirt werden kann; und nehme von diesem den Uebergang auf die noch trigonometrisch-geradlinichte Aufnahme der Catastral-Charte, so wie der topographischen und geographischen Charte eines Staates überhaupt; in-

indem ich mich dabey auf die Catastral-Aufnahme der Königl. Baierischen Monarchie beziehe; ohne jedoch der Königl. Steuer-Cataster-Commission in dem vorgreifen zu wollen, was von dieser Stelle selbst dem Publikum seiner Zeit mitgetheilt werden soll.

An diese schließen sich in §. 15. die Lehren über die trigonometrisch-sphärische Aufnahme eines großen Staates, und seiner Chartirung mit dem damit connexen unmittelbar an; bis sich mit diesem die erste Abtheilung dieser höhern Geodäsie mit den verschiedenen Arten Charten-Netze zu zeichnen endet.

Nach meinem mir vorliegenden Plan, wird die andere Abtheilung derselben mit Betrachtungen über das Haupt-Problem der höhern mathematischen Geographie, nemlich über die Bestimmung der Figur und Größe unserer Erde beginnen; welchen die Lehren über die perspectivischen Projectionen, und über trigonometrische und barometrische Höhenmessungen folgen werden; indem das Ganze mit den astronomischen Operationen und Calcul des Geographen, welche derselbe für die sphärische Aufnahme eines Staates zu machen und auszuführen hat, enden wird. Diese zweite Abtheilung der höhern Geodäsie wird der erstern unmittelbar folgen, so wie diese des Beifalls der Kenner gewürdiget werden sollte.

München, den 1. Januar 1816.

Späth.

Inhalts-

Inhalts-Anzeige

der in dieser ersten Abtheilung enthaltenen §§phen.

Einleitung.

§. 1. Allgemeine Betrachtungen über die Figur unserer Erde.

Die hydrostatische Abplattung der Erde. . . Seite 1
Die dynamische Abplattung unserer Erde. . . 9
Ueber die geographische Horizontal-Projection eines Landes und deren Aufnahme. 12

§. 2. Analytische Betrachtungen über das Ellipsoid unserer Erde, und anderer dahin einschlagender Aufgaben.

Fundamental-Gleichung für die Meridiane der nördlichen Halbkugel unserer Erde. 14
Ablenkungs-Winkel der Schwerlinie vom Mittelpunct der Erde. 16
Der Erd-Halbmesser eines Orts auf der Erde. . 17
Halbmesser der Sphäre, welche die Meridiane eines grossen Staates osculiret. 18
Der Krümmungshalbmesser eines Meridians für eine gegebene Breite. 18
Krümmungshalbmesser eines Bogens auf dem Sürfas der Erde, der mit seiner Mittagslinie einen Winkel macht. 19
Rectification eines elliptischen Bogens. . . . 25
Die Größe eines Meridian-Grades für eine geographische Breite zu finden. 27
Die Excentricität der Erd-Ellipse zu finden. . . 28
Die Oberfläche einer Erdzone zu berechnen. . . 28

Der

Der sphärische Excess. . . . . S. 30
Die Fläche eines sphärischen Dreyecks auf der Erde in Quadratgraden. 35

§. 3. Betrachtungen über das Sehen naher und entfernter Gegenstände.

Der kleinste Sehewinkel bei'm deutlichsten Sehen. . 37
Der kleinste Sehewinkel bei'm undeutlichen Sehen. . 41
Der Irradiationswinkel des Auges. . . . 43
Der kleinste dioptrische Sehewinkel für Fernröhre. . 45
Das Augenmaaß. 53

§. 4. Betrachtungen über verschiedene in den Geschäftskreis des Geographen einschlagende Dinge.

Vorläufige Bemerkungen über Länder-Charten. . 56
Verschiedene Arten ein Land aufzunehmen. . . 57
Das Recognosciren eines Landes, zum Behuf seiner Aufnahme. 60
Die Signale bey geographischen Messungen. . . 67
Allgemeine Betrachtungen über Winkelmesser. . . 74
Aufnahme terrestrischer Winkel. 78
Aufnahme astronomischer Winkel. 90
Zuverlässigkeit der Winkelmessung mit einem Geodoliten ohne Fehler. 95

§. 5. Einfluß der Construction eines Geodoliten auf die durch ihn gemessene Winkel.

Prüfung der Concentricität eines Geodoliten. . . 105
Correction eines mit einem excentrischen Geodoliten gemessenen Winkels. 107
Zuverlässigkeit der Winkelmessung wegen unspürbarer Excentricität des Geodoliten. 110
Die Libellen des Geodoliten. 110
Krümmungshalbmesser der Libelle. . . . 112
Prüfung des Spielpunctes und Standes der Libelle. . 116
Sensibilität der Libelle. 118
Einfluß der schiefen Stellung des Geodoliten auf die mit ihm gemessene Winkel. 121

Zuver-

Zuverlässigkeit in der Horizontalstellung des Geodoliten. S. 127
Abweichung des Fadenkreuzes in dem Fernrohr von seiner Verticale. 129
Abweichung der Visierlinie des Fernrohrs von dem Fiduciale des Instruments. 133
Prüfung der Bewegungsebene der Fernröhre des Geodoliten. 136
Abweichung der Fiduciale des Höhenkreises von der Visierlinie seines Fernrohrs. 144
Die Eintheilung des Limbi und seiner Nonien. . 146
Zuverlässigkeit einer gewöhnlichen Theilscheibe, nach welcher geometrische Instrumente eingetheilt werden. 151
Prüfung der Eintheilung des Limbi eines Geodoliten. 155
Das Winkelmessen mit dem Spiegelsextanten. . . 161
Prüfung des Sextanten. 166

§. 6. Reductionen gemessener Winkel. . . 172
Reduction eines Winkels auf die das Ellipsoid osculirende Sphäre. 173
Reduction eines schiefen Winkels auf seine Horizontalebene. 178
Ausgleichung eines Horizontalwinkels nach der Construction des Winkelmessers. 182
Reduction eines Winkels wegen Veränderlichkeit der Signale. 184
Reduction eines Winkels wegen veränderlicher Erleuchtung der Signale und anderer Gegenstände. . . 188
Reduction eines Winkels auf die Mitte der Station. 194

§. 7. Einige bey geographischen Messungen anwendbare polygonometrische Aufgaben.
Bestimmung des Abstandes zweier Gegenstände, durch Traversen, wenn man von einem zum andern sehen kann. 199
Bestimmung des Abstandes zweier Gegenstände, durch Traversen, bey welchen man von keinem zum andern sehen kann. 205
Aufnahme eines Polygons. 209
Das Problem von drey Puncten. 215

§. 8.

§. 8. Zuverlässigkeit der Distanzenmessung.

Bey trigonometrisch bestimmten Distanzen. . . S. 219
Messung gerader auf dem Papier gezogener Linien. . 226
Hygrometrische Aenderung einer aufs Papier gezogenen Linie. 230
Aufnahme des Muttermaaßes. 235

§. 9. Absteckung der Diagonale eines Landes. . 240
Verlängerung der Verticalebene zweier Objecte. . 242
Das Ziehen einer geraden Linie, durch zwey auf der Charte gegebene Puncte. 250

§. 10. Die Grundlinie des Geographen.

Die Auswahl und Eigenschaften der Grundlinie. . 253
Messung der Grundlinie. 256
Verification der Grundlinie. 265
Reduction der verificirten Grundlinie auf dem Seehorizont. 275
Der Centerwinkel der reducirten Grundlinie. . . 278
Die astronomische Grundlinie. 279

§. 11. Aufnahme eines kleinen Staates. . . 282
Die Centralmessung. 284
Aufnahme eines Landes nach einer oder mehrern Diagonalen. 289
Aufnahme eines Landes nach der Parallelmethode. . 293
Die Peripherialaufnahme. 297
Trigonometrische Bestimmung der geographischen Lage der Orte eines kleinen Staates. 299

§. 12. Aufnahme eines Staates durch geradlinichte Dreyecke. 303
Abstand der gemessenen Tangenten, von ihren entsprechenden Bogen. 304
Differenz des Bogens von seiner Tangente. . . 306
Der Maaßstab der Charte. 307
Die Sectionen einer Catastral-Charte. . . . 312
Die Revision der aufgenommenen Section. . . 330
Das Berechnen und Copieren der aufgenommenen Blätter. 333
Section einer topographischen Charte. . . . 338

Section einer geographischen Charte. . . . S. 339
Graduirung einer geographischen Charte. . . 342
Abweichung des Conoidal-Netzes der Charte von ihrem Ellipsoidalen. 353
Abweichung des Abdrucks einer Charte von ihrem Original. 355
Berechnung der Oberfläche eines Staates nach seiner geographischen Charte. 358

§. 13. Aufnahme eines Staates, der ein Continens von Waldungen ist. 362

§. 14. Aufnahme eines Staates, der ein Continens von Hochgebirgen ist.

Vorläufige Bemerkungen über die Aufnahme eines solchen Staates. 368
Geschäftsgang bey der Aufnahme selbst. . . . 370
Aufnahme einer Section der Gebirg-Charte, wenn in derselben mehrere trigonometrische Puncte gegeben sind. 374
Aufnahme einer Section, die keinen trigonometrisch bestimmten Punct erhalten konnte. . . . 375

§. 15. Die sphärische Aufnahme eines Staates. 377

Ausgleichung der Winkel eines sphärischen Dreyecks. . 378
Die sphärische Polygonal-Probe. 380
Provisorische Berechnung des Triangularnetzes. . 381
Interpolation der sphärischen Dreyeckreihe. . . 388
Die Coordinaten des sphärischen Dreyecknetzes. . 390
Die Ellipse des Triangularnetzes. 393
Differenz der sphärischen Messung von der geradlinichten. 395

§. 16. Berechnung der Breiten- und Längendifferenz der Orte, durch ihre sphärische Coordinaten.

Wenn diese Differenzen groß sind. . . . 397
Wenn die Differenzen nur klein sind. . . . 402
Bestimmung der Längendifferenz zweier Orte, aus ihren Polhöhen und Azymuth. 406
Bestimmung der Längendifferenzen durch Blickfeuer. . 407
Chronometrische Bestimmung der Längendifferenzen. . 410

Abwei-

Abweichung der Erdellipsoide von ihrer sie osculirenden Sphäre. . . . . S. 414
Die Sphäre, welche das Ellipsoid der Erde in 3 Puncte schneidet. 417
Das Auftragen der Orte des Staats in seine Charte durch ihre sphärische Coordinaten. 420
Combination der berechneten Längen und Breiten der Orte, mit örtlichen Beobachtungen. . . . 423
Verification der sphärischen Aufnahme eines Staates. . 426

§. 17. Aufnahme der Steppen. . . . 428

Vorläufiger Ueberschlag wegen der Blätter der Charte. 428
Ziehung der Breiten-Kreise durch mehrere Chartenblätter. 430
Ziehung der Meridiane auf der Charte. . . . 432
Das Eintragen der Orte des Staates in seine graduirte Charte. 433
Graduirung der Charte eines Staats nach der Größe und dem Format ihrer Blätter. 435

Einlei-

Einleitung.

§. 1.

Allgemeine Betrachtungen über die Figur unserer Erde.

Die hydrostatische Abplattung der Erde.

I. Nach der Ansicht, die ich in meiner Cosmogonie, Nürnberg bey Schrag 1815. S. 153. aufgestellt habe, bildete sich vorerst der eiserne Kern unserer Erde in Form eines irregulären kugelartigen Darrens, über welchem sich nachgehends das Urgestein mit seinen Gebirgen, und den übrigen Stein- und Erdarten setzten, deren Vertiefungen nachher Wasser ausfüllte, und auf diese Art die Uroceane bildet.

Das Ganze gewann unter solchen Umständen die Form eines abgeplatteten Körpers, der sich in seinem Continens nach allen Seiten abgerundet zeigte, und von der sphäroidischen Form um so mehr abwich, je mehr sein festes Land sich da und dort noch mehr als anderwärts erhob.

Dieser Darren mochte nun, während er in seinen soliden Theilen nach und nach erstarrte, die Lage seines Schwerpuncts mannichfaltig geändert, und dadurch in seiner Lage Schwankungen erlitten haben, welche

durch das Ueberfließen seiner Gewässer mancherley Revolutionen veranlaßten: er mußte auf jeden Fall eine außerordentliche Schwankung in jener Periode erlitten haben, in welcher er seinen Begleiter, unsern Mond, arripirte, durch dessen Anziehung seine Axe eine Lage erhielt, wornach die Uroceane aus ihren bisherigen Vertiefungen oder Beeten überfließen mußten.

Es rissen die hieraus entstandenen außerordentliche Strömungen das feste Land in der Richtung von Norden nach Süden hindurch, und bildeten die Halbinseln des Orients, während sie den Continens des übrigen Theils der südlichen Sphäre innontirten, und über dem eminenten Theil desselben durch das aufgeflötzte Erdreich unsern fünften Erdtheil bildeten.

So lange nun diese Strömungen andauerten, konnte unsere Erdaxe keine feste Lage erhalten; sie änderte dieselbe so lange, bis die Gewässer der Oceane unter sich ein continuirliches Becken durchgerissen und hergestellt hatten, in welchem bis zu einem andern Ereigniß dieser Art unsere Oceane und Meere unter dem Aequator sich wechselseitig gleichstark hydrostatisch drückten, und sie so ihren statischen Gleichgewichtszustand unter sich hergestellt hatten.

a. Dieser Darren hatte nun wie jeder andere mineralische Körper alle und jede Kräfte überschüssig oder vacant, welche seine feste und flüssige Stoffe, von ihren natürlichen Kräften, nicht auf ihre Cohärenz verwenden konnten: er äußert durch die Totalität dieser Kräfte eine Massen-Anziehung nach allen Seiten (meine Cosmogonie S. 56.) und strebt durch dieselbe, solche Körper, die in die Wirkungsweite seiner Anziehung kommen, sich anzunähern, das ist, er constituirt durch dieselbe die Gesetze der Gravitation über sich, und der Attraction

in

in größern Abständen; während jeder seiner Bestandtheile auf seiner Oberfläche diese Anziehung gleichzeitig nach allen Seiten äußert.

b. Durch die Massen-Anziehung unserer Erde erhält daher jeder auf ihr befindliche Körper seine Schwerkraft, während dieser die Schwungkraft gleichzeitig entgegen wirket, die er durch die Axenbewegung der Erde, nach seinem nächsten Abstand von der Axe selbst erhält: er sinkt durch den Ueberschuß der erstern über letztere, in der Richtung nach dem gemeinschaftlichen Schwerpunct des Ganzen in einer Secunde um so tiefer, oder seine Falltiefe für die erste Zeitsecunde ist um so größer, je geringer seine Schwungkraft nach seinem Abstand von der Erdaxe an und für sich ist, und je mehr in jener Richtung sich in unserer Erde Theile mehr als anderwärts befinden, durch deren specielle Anziehung er afficirt wird.

Wo also in der Erde ihr eiserner Kern sich in die über ihm liegende Steinmasse weiter als anderwärts sich heraufschieben konnte; oder wo eine dichtere Erz- oder Steinmasse, oder die nemliche Steinmasse selbst, sich dichter als anderwärts setzte; in dieser Gegend fällt jeder Körper in der ersten Secunde tiefer als anderwärts in dem nemlichen Parallel und Abstand von der Axe; er fällt um so tiefer durch seine locale Schwere, je größer, dichter und näher bey der Oberfläche solche Dinge sind.

Eben so äußern auch, der Erfahrung zufolge, eminente, oder über die Oberfläche des Continens hervorragende Dinge, z. E. Gebirge, einzelne Berge, mit dem Ganzen auch ihre specielle Massen-Anziehung gleichzeitig nach allen Seiten; sie lenken das Loth von seiner Schwerlinie um so stärker ab, je größer ihre An-

ziehung nach ihrer Größe, Dichte und Nähe, in Vergleich mit der Massen-Anziehung des Ganzen ist.

Nun ist der Pendelschwung mit der Falltiefe der Körper seines Orts, und mit ihrer Schwungkraft in nächster Beziehung; mithin in dem nemlichen Parallel und gleichem Abstand von der Erdaxe verschieden; und die Richtung des Lothes ist nicht nur mit seiner localen Schwere, sondern auch von der Seiten-Anziehung benachbarter Berge, und unterirdischer nahe zu unter Tag befindlicher Erzmassen abhängig.

c. Hatten die Oceane der Erde sich einmal in ihrem hydrostatischen Gleichgewichtszustand gesetzt, in welchem sie sich unter dem Aequator gleichstark drücken, so mußten sie sich in seiner Zone um so höher aufwölben, je größer die Schwungkraft nach dem größern Halbmesser des Aequators, in Vergleich mit den übrigen Halbmessern seiner Parallelen ist; das ist: die Wasserebene der Oceane, oder ihr Surfas, mußte sich abgeplattet formen.

Dabey war ferner die specielle Form der Wasserebene in jeder Halbkugel noch von dem Raum oder dem Becken abhängig, welches das Wasser ihrer Oceane und Meere, nach dem derselben verbliebenen Continens oder festen Lande, für sich einnehmen konnte: es formte sich nach demselben die Wasserebene in jener Halbkugel um so abgeplatteter, je mehr Raum sein Becken in Vergleich mit dem Becken der andern Halbkugel in sich faßte: es mußte sich das Wasser der andern Halbkugel um so mehr an ihrem Pole anschwellen, mithin ihre Wasserebene um so ablanger sich ziehen, je kleiner der Raum seines continuirlichen Beckens wegen der Ausdehnung seines festen Landes ausfallen konnte.

Bey unserer Erde enthält die südliche Halbkugel bey weitem mehr Wasser und weniger festes Land, als die nördliche Halbkugel; die Wasserebene der südlichen Halbkugel ist daher abgeplatteter als ihrer nördlichen; oder ihre südliche Axe ist kürzer als ihre nördliche: es formet sich daher auch der Sürfas der südlichen Oceane convexer als der nördlichen; oder gleichnamige Breitengrade sind in beiden Halbkugeln um so ungleicher, je mehr ihre Axen unter sich differiren müssen.

Anmerkung.

Der von la Caille in der südlichen Halbkugel gemessene Grad spricht für diese Ansicht; auch zeiget sich an dem Jupiter die eine Halbaxe kürzer als die andere.

---

d. Ist die mittlere durch die ganze südliche Halbkugel ausgegleichte Dichte ihrer soliden Substanz, mit der gleichnamigen Dichte der nördlichen Halbkugel ganz conform, so muß der gemeinschaftliche Schwerpunct der ganzen Erde um so mehr außer der Ebene ihres Aequators, in die nördliche Halbkugel fallen, je mehr festes Land diese in Vergleich mit der südlichen hat: es müßte die südliche Halbkugel in dem Verhältniß dichter seyn, als sie weniger Solides als jene hat; wenn der Mittelpunct der Schwere genau in die Mitte des Aequators selbst fallen sollte.

Liegt das Wasser eines Oceans in seinem Becken über einem Grunde, unter welchem die Schichten in der Richtung der Schwerlinie dichter als anderwärts sind, so wird das nemliche Wasser allda specifisch schwerer (b) als anderwärts; es drückt daher auch um so stärker gegen das benachbarte; oder eine kürzere Wassersäule drückt hier eben so stark als anderwärts eine lange-

längere: oder die Wasserebene der Halbkugel ist daher in der Richtung aller Meridiane, die durch diese Wasserregion gehen, flächer als anderwärts: oder die Meridionale Sürfas der Oceane ist in sämmtlichen Oceanen der nemlichen Halbkugel, nicht durchaus der nemliche; seine Curve hängt mit der örtlichen Falltiefe des Wassers in einer Secunde zusammen!

Abstrahiret man von dieser im Ganzen immer unbedeutenden localen Abweichung, so mußte doch in jeder Halbkugel das Wasser in dem nemlichen Parallel in seinem continuirlichen Becken eine Oberfläche annehmen, wobey dieselbe gleichweit von der Erdaxe senkrecht abstunde, wenn es seinen Gleichgewichtszustand herstellen sollte; oder die Wasserfläche mußte sich von Osten nach Westen in jedem Parallel cirkularisch krümmen; oder es muß in einem gegebenen Parallel die Wasserfläche des Oceans an den Küsten von Amerika eben so weit senkrecht von der Erdaxe abstehen, als sie an den Küsten von Europa und Asien von derselben entfernet ist.

Anders konnte sichs statt dessen mit dem Continens oder dem festen Lande verhalten, das zwischen den Oceanen mitten inne lieget, oder von diesen bespület wird.

Denn formte sich gleich uranfänglich der eiserne Kern der Erde darrenartig, so mußte sie in ihrer Form noch um so irregulairer ausfallen, so wie das Urgestein sich auf jenen Kern nach und nach setzte; es konnten jene Theile, welche einen größern Abstand als die übrigen von der Axe hatten, und insbesondere die gebirgichten Regionen durch die Axen-Umdrehung einen größern Schwung als die übrige Masse erhalten, und deswegen als taigartige Substanz sich mehr als jene aufwölben; wornach die Erde in der Richtung von Osten nach Westen

in

in ihrem festen Lande mehr eine ovale als cirkulare Form erhalten mußte.

e. Denkt man sich die von Osten nach Westen cirkulare Wasserebene (d) unter dem Continens von einem seiner Gestade bis zum andern verlängert hindurch, so trift dieser trockene Sürfas mit den übrigen nassen kreisförmig zusammen; und die Halbmesser der Parallelkreise nehmen also mit den Ordinaten der Curve vom Aequator nach dem Pole ab, nach welcher sich die Oberfläche der Oceane in der Richtung von Norden nach Süden in jeder Halbkugel unserer Erde formet.

f. Diese Curve ist für jede Halbkugel unserer Erde eine eigene (a); beide verschleifen sich nur unter dem Aequator in einander, und jede kommt in ihrer Art einer Ellipse mehr als jeder andern zunächst.

Könnte man die Breitengrade in diesen Curven vom Aequator nach den Polen hin messen, und könnte man den Halbmesser des Aequators unserer Erde sicher finden, so könnte man auch die Ellipse ausmitteln, welche dem Sürfas jeder Halbkugel am nächsten zupaßt; und somit dieser auch die Erdaxe selbst, oder die nördliche und südliche hydrostatische Abplattung unserer Erde bestimmen.

Rücksichtlich dessen sind wir nun auf der nördlichen Halbkugel viel weiter als auf der südlichen gediehen. Wir haben, wenn ich auch die ältern weniger zuverläßigen Gradmessungen ausschließe, den von Schwanberg revidirten Grad unter dem Polarcirkel, und die von Mechain und de Lambre durch ganz Frankreich hindurch gemessenen 10 Grade, welche den 45sten Grad in sich fassen; statt dessen auf der südlichen Halbkugel nur der Grad auf dem Vorgebirge der guten Hoffnung von la Caille gemessen ist.

Suchet

Suchet man nun für letztere Grade allein, die hydrostatische Abplattung der nördlichen Halbkugel, so passet für diese zunächst eine Ellipse, deren lange Axe sich zur kurzen wie 150:149 verhält. Die hydrostatische Abplattung der nördlichen Halbkugel unserer Erde wäre daher auch $\frac{1}{150}$ des Aequatorial-Halbmessers.

Nimmt man statt dessen den Schwanbergischen Grad unter dem Polarcirkel hier noch zu Hülfe, so ergiebt sich wegen der größern Entfernung der gemessenen Grade jenes Verhältniß sicherer; es würde sich die mit der Sürfaslinie congruente Ellipse noch sicherer oder zuverläßiger ergeben, wenn man sich auf die von Bouguer, Condamin und Gaudin, unter dem Aequator selbst gemessene Grade verlassen könnte.

g. Könnte sich die Ebene der hydrostatischen Sürfaslinie um die Erdaxe drehen, so würde sie einen abgeplatteten Körper bilden, dessen Oberfläche ganz mit dem hydrostatischen Sürfas der Erde congruirt, und als solche ihre wahre Horizontalfläche vorstellet. Alles Land, welches über dieser Fläche liegt, eminirt über dieselbe.

Denkt man sich durch eine gewisse Stelle A eines Parallelkreises eine diese Stelle berührende Linie oder Tangente, in der Ebene ihres Meridians, so ist diese Linie, die scheinbare Horizontallinie, und zugleich die Mittagslinie jener Stelle in dieser Richtung.

Durchschneidet jene Tangente in der Stelle A eine andere, nach der Richtung des durch sie gehenden Parallels, und denkt man sich durch beide Tangenten eine Ebene, in welcher sie ganz liegen, so ist diese die scheinbare Horizontalebene der Stelle, oder des Ortes A.

Die dynamische Abplattung unserer Erde.

II. So wie sich die hydrostatische Abplattung unserer Erde aus der Form ergiebt, welche die Wasserebene ihrer Oceane in ihrem wechselseitigen Gleichgewichszustand in jeder Halbkugel annimmt, so fundirt sich statt dessen die dynamische Abplattung jeder Halbkugel auf die Schwer- und Schwungkräfte eines Körpers verschiedenen Orts auf dem Continens, oder festen Lande selbst; in soweit diese Kräfte auf die Länge des Pendels influiren, der an denselben Secunden schlägt.

Diese Pendellänge aber ist jeden Orts in Beziehung mit der Tiefe, durch welche ein Körper nach der allgemeinen, durch die Massen-Anziehung der Erde bewirkten Schwere, und nach seiner localen Schwere (I. b.) in einer Secunde fällt; und mit der Schwungkraft, die er nach seinem nächsten Abstand vom Aequator, und nach seiner Eminenz über der Wasserebene seiner Halbkugel hat: eine Curve, deren Ordinaten für gegebene Abscissen, sich nach den Pendellängen in der Richtung von Norden nach Süden regulirt, ist daher ihrer Natur nach dynamisch; sie erstrecket sich in dem nemlichen Meridian über den Continens, welchen dieser durchschneidet, und eignet sich dabey in ihrer Form nach den allgemeinen und localen Schwerkräften und Schwungkräften, welche in dem Perimeter des Meridians statt finden.

Es ist die Curve selbst in sich congruent, da sie als Meridian um die ganze Erde durch ihre Pole gehet; aber dabey in sich um so irregulairer, je mehr und je öfter die locale Schwere (I. b.) und die mit der Eminenz der Orte (I. f.) in Beziehung stehende Schwungkraft die Gesetze der allgemeinen Schwer- und Schwungkraft ändern.

a. Liegt daher die hydrostatische Abplattungs-Curve mehrerer unter einerley Meridian liegender Orte, ganz in dem trocknen Sürfas ihres Continens, so gehet statt dessen die dynamische Abplattungs-Curve dieser Orte ganz durch diese selbst: sie wölbet sich daher über jener um so mehr, je mehr diese Orte über den trocknen Sürfas eminiren, und ist in ihrer Form um so irregulairer, je stärker und abwechselnder die Eminenz dieser Orte an und für sich ist, und je mehr die locale Schwere und Schwungkräfte an denselben von den allgemeinen statischen Gesetzen variiren.

Unter solchen Umständen bestehet daher fast für jeden Erdmeridian eine eigene dynamische Abplattungs-Curve, deren jede mit der hydrostatischen unter dem Aequator und nach den Polen hin beinahe congruiret; es giebt jene deswegen eine um so stärkere Abplattung, je mehr sie sich über dem Continens wölbet; es kommt nur jene der hydrostatischen zunächst, welche durch Orte gehet, die zunächst an den Seeküsten selbst unter einerley Meridian liegen, weil diese niemalen über die Wasserebene stark eminiren; es würden beiderley Curven mit einander parallel seyn, wenn nicht die locale Schwere Irregularitäten in die dynamische Curve brächten.

So wie wir nun die hydrostatische Abplattungs-Curve für unsere nördliche Halbkugel besser als für die südliche kennen, so haben wir auch für jene mehrere Pendellängen als für diese, nach welchen wir die Abplattungs-Curve bestimmen können; doch enden dieselbe immer mit der Pendellänge unter dem Polarcirkel, und die übrigen sind für Orte gemessen, die unter sehr verschiedenen Meridianen liegen.

b. Da nun nach den bisherigen Betrachtungen, die dynamischen Abplattungs-Curven sehr verschieden in ihrer

rer Form sind, so müßte man für jene, welche für Tornea paßt, an Orten die Pendellängen messen, die zunächst mit diesem Orte unter einerley Meridian liegen: da nun die Curve mit dem Aequator und mit der Wasserebene bey Tornea wieder coincidiret, so wird sie in ihrer Form um so gewölbter ausfallen, mithin die dynamische Abplattung um so kürzer geben, je eminenter jene Zwischenorte über dem trockenen Sürfas sind.

Man findet daher aus den Pendellängen die Abplattung der Erde immer geringer als die hydrostatische derselben; man findet um so mehr abweichende Resultate, je weniger man Rücksicht nimmt, die Orte, an welchen die Secunden-Pendel gemessen wurden, unter einerley Meridian zu wählen.

Die Resultate, welche man für die dynamische Abplattung hieraus findet, weichen daher sehr mannichfaltig von einander ab; doch fallen sie meistens zwischen $\frac{1}{300}$ und $\frac{1}{310}$ des Aequotorial-Durchmessers hinein, und das Mittel aus allen trift daher mit jener Abplattung am nächsten zusammen, welche sich durch die Mondstheorie, nach den Gesetzen der Attraction (I. a.), ergiebt; nemlich $\frac{1}{305}$ jenes Durchmessers.

c. Wollte man nun diese Curve für jene gelten lassen, die in der nördlichen Halbkugel in der Ebene ihrer Oceane nach der Richtung von Norden nach Süden selbst lieget, so würde die Eminenz der Orte (I. f.) über die Oberfläche des Elliptoids, in welcher jene Curve selbst liegt, immer eine mühsame Rechnung erfordern; statt dessen sich diese Eminenz durch barometrische Beobachtungen sehr leicht für die hydrostatische Curve ergiebt: außerdem ist die Bestimmung dieser Curve nicht so sicher, wie die Bestimmung der in der Wasserebene selbst liegenden; weil die Pendellängen sich nicht so zuverläßig messen lassen, als für diese Theorie erforderlich ist.

Letzte-

Letztere ist daher die natürlichste, welche man bey geographischen Messungen zum Grunde legen kann; indem man sich die Wasserebene selbst als die Oberfläche eines Elliptoids vorstellet, die mit dieser ganz congruiret.

Wäre unter dem Aequator selbst der ihn durchschneidende Meridiangrad, und außerdem auch wenigstens ein Aequatorialgrad selbst mit der Genauigkeit gemessen worden, mit welcher heutzutage ein geschickter Geograph operiret, so könnte man mit Zuziehung des von Schwanberg gemessenen Polargrades, und der zehen von Mechain uud de Lambre in Frankreich gemessenen Grade, jene der Wasserebene der nördlichen Halbkugel zunächst anpassende Ellipse finden; man könnte eben so den Halbmesser des Aequators selbst aus seinem gemessenen Grade, in Voraussetzung seiner cirkularischen Krümme, berechnen: man könnte selbst die Ovalität des Erden-Continens (I. e.) näher kennen lernen, wenn unter dem Aequator selbst, oder statt dessen in mehrern seiner Parallelen Längengrade gemessen würden.

Es würde sich das Problem über die Figur und Größe der Erde um so besser lösen, je mehr Meridian- und Parallelgrade unserer Erde mit größter Genauigkeit an Orten gemessen wurden, wo das Loth nicht zur Seite afficirt werden kann (I. b.).

Ueber die geographische Horizontal-Projection eines Landes und deren Aufnahme.

III. Denkt man sich auf die scheinbare Horizontal- oder auf die Mittagslinie eines über den trocknen Sürfas eminenten Ortes A (I. f.) eine senkrechte Linie, so ist diese ganz in der Ebene seines Meridians, und schneidet den trocknen Sürfas und den Halbmesser des Aequators

tors in einer gewissen Stelle: es ist die Stelle, in welcher diese Linie den trocknen Sürfas trift, die geographische horizontale Projection des Ortes A, und der Abstand dieses Puncts von dem Durchschnittspunct mit dem Aequator, heißt die Normale des Ortes A; ein schwerer in A frey sinkender Körper, würde in seiner Normale durch die Erde sinken, wenn er dieselbe frey durchfallen könnte.

a. Denkt man sich ferner eben so die Gränzpuncte eines Landes, und anderer gegebener Stellen desselben, in ihrer Projection, auf seiner wahren Horizontalebene, so bildet ihr Verband die geographische Horizontal-Projection des Landes selbst; die als solche, nach geogr. Quadratmeilen gemessen wird, deren jede $\frac{1}{15}$ eines Aequatorialgrades zur Seite hat.

Diese Projection des Landes ist daher immer ein Theil der wahren Horizontal- oder Wasserebene unserer Erde; und jeder seiner auf diese Ebene reducirten Meridiane ist ein Stück der meridialen Sürfaslinie der Halbkugel, welcher das Land angehöret, oder der mit ihr gleichachtigen Ellipse (II. c.): und jeder Parallel des Landes ist ein Stück jenes cirkularischen Parallels jener Halbkugel, der sich auf der Wasserebene projiciret.

b. Könnte man den Halbmesser eines Kreises finden, der mit dem größten Meridian des Landes ganz coincidiret, oder wenigstens denselben in seinen meisten Puncten osculiret; so könnte man diesen ohne merklichen Fehler als den Halbmesser einer Sphäre ansehen, auf deren Horizontalebene die horizontale Projection des Landes ganz lieget: und sonach diese Sphäre mit jener Ellipsoide verwechseln, deren Oberfläche zunächst mit der Wasserebene der Halbkugel zusammen trift.

§. 2.

Analytische Betrachtungen über das Elliptoid unserer Erde, und anderer dahin einschlagender Aufgaben.

Nach §. 1. I. constituiret sich die wahre Horizontalebene unserer Erde durch den hydrostatischen Gleichgewichtszustand ihrer Oceane und Meere, in ihren beiden Halbkugeln: es formt sich im Ganzen der Sürfas ihrer Wasserebenen durch die Schwerkraft und Fliehkraft der Theile abgeplattet; und ihre nördliche Hälfte ist dabey abgeplatteter als ihre südliche, weil jene mehr festes Land als diese in sich enthält. Ist daher der Continens der südlichen Halbkugel nicht dichter als der der nördlichen, so muß der Schwerpunct der ganzen Erde, außer der Ebene ihres Aequators, und zwar um so weiter außer derselben fallen, je mehr solide Masse die nördliche Halbkugel vor der südlichen hat.

Diese Wasserebene der Oceane und Meere unserer Erde formet sich in der Richtung von Osten nach Westen circularisch, §. 1. I. b.; statt dessen sie in der Richtung von Norden nach Süden, wenigstens für die nördliche Halbkugel mit einer Ellipse beinahe congruiret, deren lange Axe sich zu ihrer kurzen wie 150:149 verhält, §. 1. I. d.: es haben daher sämmtliche in der Wasserebene unserer Erde liegende beinahe elliptische Meridiane, dieses Axenverhältniß gemeinschaftlich; oder dieses Verhältniß gilt für alle Meridiane dieser Halbkugel.

Fundamental-Gleichung für die Meridiane der nördlichen Halbkugel unserer Erde.

I. Es stelle nun in Fig. 1. BC den Halbmesser des Erd-Aequators, AC die Axe ihrer nördlichen Halbkugel, und

und AMB den Quadranten des in der Wasserebene liegenden elliptischen Meridians eines Ortes vor, dessen Projection auf der Wasserebene in (M) trift, §. 1. l. c.; und dessen Excentricität CD ist.

Auch sey TH die in der Ebene dieses Meridians liegende, durch den Punct M gehende scheinbare Horizontale, §. 1. l. c.; und MQ auf dieselbe in dem Puncte M senkrecht; so ist einmal die Linie TH eine Tangente für den Punct M der Curve; MN die Normale dieses Puncts; NP die Subnormale; und TP die Subtangente dieses Punctes, und MQ der Erd-Halbmesser desselben; und der Winkel MNB die Polhöhe eines Ortes, der sich in M auf der Wasserebene projiciret.

Nun ist ferner für diese Ellipse nach geometrischen Gründen

$$SM^2 = PC^2 = \frac{CB^2}{AC^2} \cdot (AC^2 - PM^2);$$ oder setzt man den Halbmesser

$BC = 1$ und $BC : AC = 1 : \mu$; $PC = x$; $MP = \eta$;

so ist auch $x^2 = \frac{1}{\mu^2} \cdot (\mu^2 - \eta^2)$; $\eta^2 = \mu^2 (1 - x^2)$.

Da ferner die Excentricität $CD = \sqrt{BC^2 - AC^2}$ oder $\varepsilon^2 = (1 - \mu^2)$ ist, so ist auch $\mu^2 = (1 - \varepsilon^2)$; mithin auch $\eta^2 = (1 - \varepsilon^2)(1 - x^2)$.

Nun ist auch die Normale $PN = \frac{AC^2}{BC^2} \cdot CP = \mu^2 x$;

und $\text{tang } MNB = \frac{MP}{NP} = \frac{\eta}{\mu^2 x} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$;

$\text{tang } \alpha^2 = \frac{1}{\mu^2} \cdot \frac{(1 - x^2)}{x^2}$; $x^2 = \frac{1}{1 + \mu^2 \cdot \text{tang } \alpha^2}$; oder

$$x^2 = \frac{1}{1 + \mu^2 \cdot \frac{\text{Sin } \alpha^2}{\text{Cos } \alpha^2}} = \frac{\text{Cos } \alpha^2}{\mu^2 \cdot \text{Sin } \alpha^2 + \text{Cos } \alpha^2}$$

$$= \frac{\text{Cos } \alpha^2}{\text{Cos } \alpha^2 + (1 - \varepsilon^2) \text{ Sin } \alpha^2} = \frac{\text{Cos } \alpha^2}{\text{Cos } \alpha^2 + \text{Sin } \alpha^2 - \varepsilon^2 \text{ Sin } \alpha^2};$$

also $x = \sqrt{\frac{a \operatorname{Cos} \alpha}{(1 - \varepsilon^2 . \operatorname{Sin}^2 . \alpha)}} = CP$ in Fig. 1.

Sonach ist auch in der Fundamentalgleichung für η das Quadrat der Ordinate

$$\eta^2 = (1 - \varepsilon^2) \left(1 - \frac{\operatorname{Cos}^2 \alpha}{1 - \varepsilon^2 . \operatorname{Sin}^2 \alpha}\right)$$

$$= (1 - \varepsilon^2) \left(\frac{\operatorname{Sin} \alpha^2 - \varepsilon^2 . \operatorname{Sin} \alpha^2}{1 - \varepsilon^2 . \operatorname{Sin} \alpha^2}\right); \text{ oder}$$

$$\eta = \frac{a . (1 - \varepsilon^2) . \operatorname{Sin} \alpha}{\sqrt{(1 - \varepsilon^2 . \operatorname{Sin}^2 \alpha)}} = MP.$$

Ziehet man $p\mu$ parallel mit PM und setzet $Pp = -dx$, so ist auch $\mu q = d\eta$, und nach den Regeln des Differenzial-Calkuls

$$dx = -\frac{(1 - \varepsilon^2) . d\alpha . \operatorname{Sin} \alpha}{(1 - \varepsilon^2 . \operatorname{Sin} \alpha^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad d\eta = \frac{(1 - \varepsilon^2) . d\alpha . \operatorname{Cos} \alpha}{(1 - \varepsilon^2 . \operatorname{Sin} \alpha^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ablenkungs-Winkel der Schwerlinie vom Mittelpunct der Erde.

II. Ziehet man von M nach dem Mittelpuncte C eine gerade Linie MC, so weicht diese von der Schwerlinie MN um den Abweichungs-Winkel CMN ab.

Setzt man nun die Central-Breite $MCB = \beta = SMC$; so ist in dem Dreyeck SMC, $\operatorname{Sin} \beta : SC = \operatorname{Cos} \beta : SM$; oder

$$\operatorname{Sin} \beta : \eta = \operatorname{Cos} \beta : x; \quad \eta = x \operatorname{tang} \beta.$$

Ferner in dem Dreyeck MNP ist $NP . \operatorname{tang} \alpha = \eta$; $NP = \mu^2 x$; also

$$\mu^2 x . \operatorname{tang} \alpha = x . \operatorname{tang} \beta; \text{ also } \operatorname{tang} \beta = \mu^2 . \operatorname{tang} \alpha.$$

In dem Dreyeck CMN ist ferner

$$CMN = 180 - (CNM + MCB); \quad CNM = 180 - \alpha;$$

$$MCB = \beta; \text{ also } CMN = \alpha - \beta;$$

$$\text{und } \operatorname{tang} (\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tang} \alpha - \operatorname{tang} \beta}{1 + \operatorname{tang} \alpha . \operatorname{tang} \beta}; \text{ oder}$$

$$\operatorname{tang} CMN = \frac{(1 - \mu^2 .) \operatorname{tang} \alpha}{1 + \mu^2 . \operatorname{tang} \alpha^2}.$$

Der

Der Erd-Halbmesser eines Orts auf der Erde.

III. Nach (I.) ist die Subnormale

$NP = \mu^2 x = (1-\varepsilon^2) \cdot \cos\alpha : \sqrt{(1-\varepsilon^2 \sin\alpha^2)}$;

Ferner ist

$CN = CP - NP = x - (1-\varepsilon^2)\, x$

$= \varepsilon^2 \cdot \cos\alpha : \sqrt{(1-\varepsilon^2 \sin\alpha^2)}$;

und $NM^2 = PM^2 + PN^2 = \eta^2 + (1-\varepsilon^2)\, x^2$.

$= (1-\varepsilon^2)(1-x^2) + (1-\varepsilon^2)\, x^2$; oder

$$NM^2 = (1-\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2 x^2) = (1-\varepsilon^2)\left(1 - \frac{\varepsilon^2 \cdot \cos\alpha^2}{1-\varepsilon^2 \sin\alpha^2}\right)$$

$$= \frac{(1-\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)}{1-\varepsilon^2 \sin\alpha^2}; \quad \text{also}$$

die Normale $NM = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{\sqrt{(1-\varepsilon^2 \sin^2\alpha)}}$.

Auch ist

$CM^2 = CP^2 + PM^2 = x^2 + \eta^2 = x^2 + (1-\varepsilon^2)(1-x^2)$

$= 1 - \varepsilon^2 (1-x^2)$; oder

$$CM = 1 - \varepsilon^2\left(1 - \frac{\cos\alpha^2}{1-\varepsilon^2 \sin\alpha^2}\right) = 1 - \frac{\varepsilon^2 \cdot (1-\varepsilon^2) \sin\alpha^2}{1-\varepsilon^2 \sin\alpha^2};$$

also

$$CM = a \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{\varepsilon^2 (1-\varepsilon^2) \sin\alpha^2}{1-\varepsilon^2 \cdot \sin\alpha^2}\right)}.$$

Letztlich ist in dem Dreyeck CNQ; $\sin CQN : CN = \sin CNQ : CQ$; oder

$\cos\alpha : CN = \sin\alpha : CQ$; oder

$CQ = NC \cdot \tan\alpha \cdot = \varepsilon^2 x \cdot \tan\alpha$

$= \varepsilon^2 \cdot \tan\alpha \cos\alpha : \sqrt{(1-\varepsilon^2 \sin\alpha^2)}$

$CQ = \varepsilon^2 \sin\alpha : \sqrt{(1-\varepsilon^2 \sin\alpha)}$;

ferner ist $QN = CN : \cos\alpha = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{(1-\varepsilon^2 \sin\alpha^2)}}$;

mithin der Erd-Halbmesser für M oder

$$MQ = NM + QN = \frac{1 - \varepsilon^2}{\sqrt{(1 - \varepsilon^2 \operatorname{Sin} \alpha^2)}} + \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{(1 - \varepsilon^2 \operatorname{Sin} \alpha^2)}}$$

$$= \frac{a.}{\sqrt{(1 - \varepsilon^2 \operatorname{Sin} \alpha^2)}}.$$

Halbmesser der Sphäre, welche die Meridiane eines großen Staates osculiret.

IV. Es sey die Polhöhe der Orte Z und U gleich Φ und Ψ, so ist nach (II.) ihre wahre Breite ECZ und ECU; und

$$\operatorname{tang} ECZ = \mu^2 . \operatorname{tang} \Phi; \quad \operatorname{tang} ECU = \mu^2 . \operatorname{tang} \Psi.$$

Liegt nun der Ort W zwischen beiden mitten inne, so ist auch seine wahren Breite $ECW = \frac{1}{2}(ECZ + ECU)$; und $\operatorname{tang} ECW = \mu^2 . \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\Phi + \Psi)$.

Nach (III.) kann man ferner CZ „ CW „ CU berechnen; und aus diesen mit den eingeschlossenen Winkeln die Seiten ZW „ WU und den Winkel ZWU finden.

Bisectiret man nun WU und ZW durch die Perpendikel bR „ aR, so laufen diese in dem Puncte R zusammen; und $WR = UR = ZR$ ist der Halbmesser einer Sphäre, in welcher die Puncte Z „ W „ U des Meridians selbst liegen; die deswegen mit dem elliptischen Meridian selbst zunächst überein kommt. §. 1. III.

Dabey ist nun $WaR = WbR = 90$; und

$180 + ZWU + aRb = 360$; $WRb = 90 - \frac{1}{2} ZWU$;

$$\text{und } WR = \frac{Wb}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2} ZWb}.$$

Der Krümmungs-Halbmesser eines Meridians für eine gegebene Breite.

V. Dieser ist immer der Halbmesser eines Kreises, welcher den elliptischen Bogen gegebenen Orts osculirt,

§. 1.

§. 1. III.; er fällt also immer in die Schwerlinie des Ortes selbst. Rücksichtlich dessen ist nun das Dreyeck MNP ähnlich dem Dreyeck μqM; sonach $\mu q : qM = NP : PM$; oder $d\eta : -dx = x : \eta$; also

$$\frac{\eta}{x} = -\frac{dx}{d\eta} = \text{tang } \alpha.$$

Auch ist ferner der Krümmungs-Halbmesser

$$R = -\frac{dx}{dp}(1+p^2)^{\frac{3}{2}}; \text{ und } p = \frac{d\eta}{-dx} = \text{Cotang } \alpha;$$

$$dp = -.\frac{-d\alpha}{\text{Sin}\,\alpha^2} = \frac{d\alpha}{\text{Sin}\,\alpha^2}; \; dx = -\frac{(1-\varepsilon^2)\,d\alpha.\text{Sin}\,\alpha}{(1-\varepsilon^2\,\text{Sin}\,\alpha^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{(1-\varepsilon^2).d\alpha.\text{Sin}\,\alpha.\text{Sin}\,\alpha^2}{(1-\varepsilon^2.\text{Sin}\,\alpha^2)^{\frac{3}{2}}.d\alpha} = -\frac{(1-\varepsilon^2).\text{Sin}\,\alpha^3}{(1-\varepsilon^2\,\text{Sin}\,\alpha^2)^{\frac{3}{2}}};$$

mithin

$$R = \frac{(1-\varepsilon^2)\,\text{Sin}\,\alpha^2.}{(1-\varepsilon^2\,\text{Sin}\,\alpha)^{\frac{3}{2}}}(\text{Cosec.}\,\alpha^2)^{\frac{3}{2}}.$$

$$= \frac{(1-\varepsilon^2)\,\text{Sin}\,\alpha^3}{(1-\varepsilon^2\,\text{Sin}\,\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{1}{(\text{Sin}\,\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}; \text{ oder}$$

$$R = a(1-\varepsilon^2)\,(1-\varepsilon^2\,\text{Sin}\,\alpha^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{(1-\varepsilon^2)\,a}{\sqrt{(1-\varepsilon^2\,\text{Sin}^2.\alpha)^3}}.$$

Dieser Krümmungs-Halbmesser kann noch für den Halbmesser der osculirenden Sphäre (IV.) eines Staates gelten, der von Norden nach Süden nur etliche Breitengrade mißt.

Krümmungs-Halbmesser eines Bogens auf dem Sürfas der Erde, der mit seiner Mittagslinie einen Winkel macht.

VI. Von dem Krümmungs-Halbmesser (V.) weicht aber jener eines kleinen Erdbogens ab, der mit der Meridianebene seines Endes oder Anfangs einen gewissen Winkel macht, oder ein Azymuth hat.

Es sey z. E. in Fig. 2. AE der Aequator; PQ die Axe der Erde; und PLEC der Quadrant der Meridianebene eines Ortes L, dessen scheinbare Horizontallinie Oa, und die auf ihn senkrechte Schwerlinie Lg ist. Diese schneidet den Aequator selbst unter dem Winkel LDE=L, welcher der geographischen Breite des Ortes gleich ist.

a) Denkt man sich das Ellipsoid der Erde in der Schwerlinie des Ortes L, bey R parallel mit seiner scheinbaren Horizontallinie durchschnitten, so stehet dieser Schnitt von L um RL ab, und die Ebene des Schnittes selbst bildet eine Ellipse NUWS, deren halbe lange Axe RW und kurze RW ist.

Ziehet man ferner mit dieser Ebene eine andere hUM durch den Mittelpunct C der Erde parallel, so ist diese die wahre Horizontalebene des Ortes L.

Ist nun KL sehr klein, so trift der Punct R fast in den Punct K; und es ist nun eben so viel, als ob die Erde durch den Punct K selbst parallel mit Oa durchschnitten wäre.

Denkt man sich außerdem durch den Punct K eine Ebene FTWD, parallel mit dem Aequator, so schneidet diese die Ellipse NUWC in dem Puncte W; und die lange Are WK derselben liegt ganz in dieser Ebene; auch ist diese der Sinus des Center-Winkels KBW,

Eben so liegt auch die kurze Axe NS dieser Ellipse als Chorde des elliptischen Meridians PLEC ganz in der Ebene desselben.

Denkt man sich endlich auch eine Verticalebene durch den gegebenen Bogen Lb der Erde, so schneidet diese auf der elliptischen Ebene NWS die Linie KU für jenen Bogen ab, und es ist der Winkel derselben mit der kurzen Axe NK, oder der Winkel NKU=W dem Azymuthal-Winkel NLb gleich, welchen die Meridianebene durch L mit der Verticalebene durch den Bogen Lb macht.

Nun

Nun sey R der Krümmungs-Halbmesser des kleinen Meridianbogens NL, so entspricht diesem auf der Ellipse NWS die halbe Chorde NK; ist ferner (ϱ) der Krümmungs-Halbmesser des Bogen Lb, so kommt diesem die Chorde UK zu.

Ist nun der parallactische Winkel des ersten Bogens $= \Phi$ und des letztern $= \Psi$; so ist einmal, wenn beide Halbmesser gleich wären,

$NK : UK = \Phi : \Psi$; sind statt dessen die Winkel gleich, so ist auch

$$\frac{NK : UK = R : \varrho;}{NK^2 : UK^2 = R\Phi : \varrho\Psi.} \quad \text{mithin}$$

Ist nun der Abstand des Schnitts von L oder LK unendlich klein, so kann man $\Phi = \Psi$ setzen; und es verhalten sich in diesem Falle die Krümmungs-Halbmesser, wie die Quadrate der Durchmesser der Ellipse NWS; oder es ist $\varrho = \frac{UK^2}{NK^2} \cdot R.$

b) Alles kommt daher darauf an, die Chorden UK und NK dieser Ellipse zu finden, wenn man den Krümmungs-Halbmesser S des Bogens Lb finden will: diese aber zu erhalten, muß zuvörderst das Verhältniß der halben langen Axe KW zur kurzen NK bey der Ellipse NWS gesucht werden; welches sich am füglichsten durch den Halbmesser $MC = hC$ des wahren Horizonts des Ortes L ergiebt; der deswegen vorerst berechnet werden muß.

Rücksichtlich dessen ist nun einmal die Gleichung für die Ellipse

$$Lf^2 = PC^2 - \frac{PC^2 . Cf^2}{CE^2};$$

oder setzt man indessen $Cf = x$; $Lf = \eta$; $CE = a$; $CP = b$;

so ist $\eta^2 = b^2 - \frac{b^2 . x^2}{a^2}$; und $x^2 = \frac{a^4}{a^2 + b^2 . \tan g^2 L}$.

Es ist ferner

$$CL^2 = x^2 + \eta^2 = b^2 - \frac{b^2 . x^2}{a^2} + x^2 = b^2 + \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) x^2 ; \text{ oder}$$

$$CL^2 = b^2 + \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) \frac{a^4}{a^2 + b^2 . \text{tang} L} = \frac{a^4 + b^4 . \text{tang}^2 . L}{a^2 + b^2 . \text{tang}^2 . L} .$$

Auch ist $hz = \frac{b}{a} Cf = \frac{b}{a} x$; und $Lf : CZ = CQ : CE$;

oder $\eta : CZ = b : a$; also

$$CZ = \frac{a}{b} \eta : CZ^2 = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot (a^2 - x^2) = a^2 - x^2 ;$$

Ferner $CZ^2 + hZ^2 = hC^2$; oder

$$a^2 - x^2 + \frac{b^2}{a^2} x^2 = hC^2 = a^2 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) x^2 ; \text{ oder}$$

$$hC = a^2 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) \cdot \frac{a^4}{a^2 + b^2 \text{tang}^2 L} = \frac{a^2 b^2 . (1 + \text{tang}^2 L)}{a^2 + b^2 \text{tang}^2 L} ;$$

oder $$hC = \frac{a^2 . b^2 . \text{Sec}. L^2}{a^2 + b^2 . \text{tang} L^2} = CM .$$

Setzt man nun, wie bisher, $a : b = 1 : \mu$; und $a = 1$; so ist $a^2 - b^2 = 1 - \mu^2 = \varepsilon^2$; $b^2 = \mu^2$; und $\mu^2 = 1 - \varepsilon^2$; mithin auch

$$hC^2 = \frac{(1 - \varepsilon^2) \text{Sec}.^2 L)}{1 + \frac{(1 - \varepsilon^2) \text{Sin} L^2}{\text{Cos} L^2}} = \frac{1 - \varepsilon^2}{\frac{\text{Cos} L^2 (\text{Cos} L^2 + \text{Sin} L^2 - \varepsilon^2 \text{Sin}^2 L}{\text{Cos} L^2}} ;$$

oder

$$hC^2 = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2 . \text{Sin} L^2} = K \text{ für den Halbmesser } AC = a = 1 .$$

c) Ist auf diese Art der Durchmesser hC des Ellipsoids APEQ gefunden, so drückt sich ihr Diametral-Verhältniß $CL \,„\, hC$ durch folgende Gleichung aus:

$$KS^2 = \frac{hC^2}{LC^2} . (LC^2 - CK^2) .$$

Setzt man nun $KL = Z$; so ist auch $CK = LC - Z$; und

$$KS^2 = \frac{hC^2}{LC^2} \cdot (LC^2 - (LC - Z)^2 = \frac{hC^2}{LC^2} \cdot (2CK . Z - Z^2)) ;$$

oder

oder auch

$$KS^2 = hC^2 . \left(\frac{2Z}{LC} - \frac{Z^2}{LC^2}\right).$$

Es ist ferner in den Dreyecken BKC und LKI; $KI : BK = LK : K$; mithin $KI = \frac{BK . LK}{KC}$; ist nun $KL = Z$ äußerst klein, so ist auch $KI = \frac{BI}{LC} \cdot Z = u$ beinahe.

Da nun die lange Axe KW der Ellipse NWS auch der Sinus des Winkels KBW oder $WK = \text{Sin}\,\psi$ ist, so ist auch $KI = \text{Sin.v Cos.}\,\psi$; mithin auch

$$u = BI\,(1 - \text{Cos}\,\psi);\ \text{Cos}\,\psi = 1 - \frac{u}{BI};$$

$$\text{oder}\quad 1 - \text{Sin}\,\psi^2 = \left(1 - \frac{u}{BI}\right)^2 = 1 - \frac{2u}{BI} + \frac{u^2}{BI^2};$$

also auch $\text{Sin}\,\psi^2 = \frac{2u}{BI} - \frac{u^2}{BI^2} = KW^2$; oder

$$KW^2 = \frac{2.BI.Z}{BI.CL} - \frac{BI^2.Z^2}{BI^2.CL^2} = \frac{2Z}{CL} - \frac{Z^2}{CL^2}.$$

Stellet man nun KW mit KS zusammen, so ist diesemnach

$$KW : KS = \sqrt{\frac{2Z}{CL} - \frac{Z^2}{CL^2}} : hC . \sqrt{\frac{2Z}{CL} - \frac{Z^2}{CL^2}}$$

$$= 1 : hC = 1 : K;\ \text{oder}$$

$KW : KS = CE : CM$; das ist: die Axen KS und KW der Ellipse NWS verhalten sich, wie die Halbmesser CE und CM des Erdellipsoids selbst.

Fället man nun in der Ellipse NWS aus dem Puncte U die Ordinate Uq auf die Axe KN, und setzt $KU = x$; und den Winkel $UKN = bLO = \omega$; so ist in den bey (q) rechtwinklichten Dreyeck

$$Uq = x\ \text{Sin}\,\omega;\ Kq = x\ \text{Cos}\,\omega.$$

Auch

Auch ist ferner die Gleichung für die Ellipse vom Mittelpunct

$$Uq^2 = \frac{NK^2}{K\omega^2} \cdot (W^2K^2 - Kq^2);$$ oder für $KW = 1$,

und $KW : NK = 1 : K$;

$$Uq^2 = K^2 \cdot (1 - qK^2);$$ oder $x^2 \operatorname{Sin}^2 \omega$

$$= a^2 \cdot (1 - x^2 \operatorname{Cos}\omega^2);$$ also auch

$$x^2 \cdot (\operatorname{Sin}\omega^2 + K^2 \operatorname{Cos}\omega^2) = K^2;$$

$$x^2 = \frac{K^2}{\operatorname{Sin}\omega^2 + K^2 \operatorname{Cos}\omega^2} = KU^2.$$

Wird nun dieser Werth in die Grundformel für den Krümmungs-Halbmesser (ϱ) des Bogen Lb substituirt, so wird in (a).

$$\varrho = \frac{KU^2}{KS^2} \cdot R = \frac{R \cdot K^2}{(\operatorname{Sin}\omega^2 + K^2 \operatorname{Cos}\omega^2) \cdot K^2}$$

$$= \frac{R}{\operatorname{Sin}\omega^2 + K^2 \operatorname{Cos}\omega^2}.$$

Nun war aber nach (b).

$$K = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2 \cdot \operatorname{Sin} L^2};$$ mithin auch

$$\varrho = \frac{R}{\operatorname{Sin}\omega^2 + \frac{(1-\varepsilon^2)\operatorname{Cos}\omega^2}{1 - \varepsilon^2 \operatorname{Sin} L^2}} = \frac{R \cdot (1 - \varepsilon^2 \operatorname{Sin} L^2)}{1 - \varepsilon^2 \operatorname{Sin}\omega^2 \operatorname{Cos} L^2};$$ oder

$$\varrho = \frac{a \cdot (1-\varepsilon^2) \cdot (1 - \varepsilon^2 \operatorname{Sin} L^2)}{(1 - \varepsilon^2 \operatorname{Sin} L^2)^{\frac{3}{2}} \cdot (1 - \varepsilon^2 \operatorname{Sin}\omega^2 \operatorname{Cos}^2}$$ nach V; oder

$$\varrho = \frac{a \cdot (1 - \varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon^2 \operatorname{Sin}\omega^2 \operatorname{Cos} L^2) \cdot \sqrt{(1 - \varepsilon^2 \operatorname{Sin} L^2)}}.$$

Unter dem Aequator ist $L = o$;

mithin $\operatorname{Sin} L = o$; $\operatorname{Cos} L = 1$; demnach

$$\varrho = \frac{a \cdot (1 - \varepsilon^2)}{1 - \varepsilon^2 \cdot \operatorname{Sin}\omega^2}.$$

Ist

Ist $\omega = 90$, so fällt der Bogen Lb in die Ebene des Aequators selbst, und es ist in diesem Fall $\sin \omega = 1$; und

$$\varrho = a\left(\frac{1-\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right) = a.$$

Unter den Polen ist $L = 90$;

mithin $\sin L = 1$; $\cos L = 0$; also

$$\varrho = \frac{a.(1-\varepsilon^2)}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)}} = a.\sqrt{(1-\varepsilon^2)}.$$

Für $\omega = 90$ ist auch $\varrho = a.\sqrt{(1-\varepsilon^2)}$; weil allda alle Verticalebenen eigentliche Meridiane sind.

Ich bin hier den Ansichten des verewigten Lamberts gefolgt, wornach sich der Krümmungs-Halbmesser für diese Fälle genau genug ergiebt.

Rectification eines elliptischen Bogens.

VII. Es sey in Fig. 1. der Bogen BM, dessen Länge nach Metern, oder auch nach dem landüblichen Fuße angegeben werden soll.

Bezeichnet nun S die Länge dieses Bogens, so ist sein Differential $dS = M\mu = \sqrt{Mq^2 + q\mu^2}$;

oder auch $\sin q\mu M : Mq = 1 : M\mu$; oder

$$\sin L : -dx = 1 : dS.$$

$$dS = \frac{-dx}{\sin L} = -\cdot\frac{-dL.(1-\varepsilon^2)\sin L}{\sin L.(1-\varepsilon^2 \sin L)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= (1-\varepsilon^2).dL(1-\varepsilon^2 \sin^2)^{-\frac{3}{2}}; \text{ nach (I.)};$$

oder $$\frac{dS}{1-\varepsilon^2} = dL\ (1-\varepsilon^2 \sin^2 L)^{-\frac{3}{2}}.$$

Setzt man indessen $1-\varepsilon^2.\sin^2.L = 1-p$; so ist auch nach der Binomial-Formel

$$(1-p)$$

$$(1-p)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \tfrac{3}{2}p + \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{5}{4}p^2 + \frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6}p^3 + \frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8}p^4 + \frac{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}p^5 + \ldots$$

mithin auch

$$\frac{dS}{1-\varepsilon^2} = dL.\left[1 + \tfrac{3}{2}\varepsilon^2.\operatorname{Sin}^2 L + \frac{3\cdot5}{2\cdot4}.\varepsilon^4.\operatorname{Sin}^4 L + \frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6}.\varepsilon^6 \operatorname{Sin}^6 L + \ldots\right.$$

Nun ist aber

$\operatorname{Sin}^2.L = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\operatorname{Cos}2L$; also $\tfrac{3}{2}\varepsilon^2\operatorname{Sin}^2 L = \tfrac{3}{2}.\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 - \tfrac{3}{2}.\tfrac{1}{2}\varepsilon^2\operatorname{Cos}2L$;

$\operatorname{Sin}^4.L = \tfrac{3}{8} - \tfrac{4}{8}\operatorname{Cos}2L + \tfrac{1}{8}\operatorname{Cos}4L$; also

$$\frac{3\cdot5}{2\cdot4}\varepsilon^4.\operatorname{Sin}^4 L = \frac{3\cdot5}{2\cdot4}.\tfrac{3}{8}\varepsilon^4 - \frac{3\cdot5}{2\cdot4}.\tfrac{4}{8}\varepsilon^4.\operatorname{Cos}2L + \frac{3\cdot5}{2\cdot4}.\tfrac{1}{8}.\varepsilon^4\operatorname{Cos}4L.$$

$\operatorname{Sin}^6.L = \tfrac{10}{32} - \tfrac{15}{32}\operatorname{Cos}2L + \tfrac{6}{32}\operatorname{Cos}4L - \tfrac{1}{32}\operatorname{Cos}4L$;

u. s. w.

Werden die auf solche Art fortgesetzten Werthe in die Grundformel substituirt, so ist

$$\frac{dS}{1-\varepsilon^2} = dL.\left(1 + \tfrac{3}{2}\cdot\frac{2.\varepsilon^2}{1.2^2} + \frac{3\cdot5\cdot4\cdot3}{2.4.1.2.2^4}.\varepsilon^4 + \frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6}.\frac{6.5.4.\varepsilon^6}{1.2.3.2^6} + \right.$$

$$- dL.\left(\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{3\cdot5\cdot4}{2.4.2^3}\varepsilon^4 + \frac{3\cdot5\cdot7}{2.4.6\cdot2.2^5}.\varepsilon^6\right)\operatorname{Cos}2L;$$

$$+ dL.\left(\frac{3\cdot5}{2\cdot4}.2\tfrac{1}{3}\varepsilon^4 + \frac{3\cdot5\cdot7.6}{2.4.6.2^5}.\varepsilon^6\right)\operatorname{Cos}4L;$$

$$- dL.\frac{3\cdot5\cdot7}{2.4.6.2^5}.\varepsilon^6.\operatorname{Cos}6L \quad \text{u. s. w.}$$

Statt dessen kann man überhaupt auch setzen:

$$\frac{dS}{1-\varepsilon^2} = m\,dL - n.dL\operatorname{Cos}2L + p\,dL\operatorname{Cos}4L - q\,dL\operatorname{Cos}6L + v\,dL\operatorname{Cos}8L -$$

Nun ist aber

$\int d\phi = \phi$; $\int d\varphi \operatorname{Cos}\mu\phi = \frac{1}{\mu}.\operatorname{Sin}\mu\varphi$; also auch

$$\frac{S}{1-\varepsilon^2} = mL - \tfrac{1}{2}n\operatorname{Sin}2L + \tfrac{1}{4}p\operatorname{Sin}4L - \tfrac{1}{6}q\operatorname{Sin}6L = \tfrac{1}{8}v\operatorname{Sin}8L -$$

Setzt

Setzt man den Winkel $L = 90$, so ist in Theilen des Halbmessers $L = \frac{1}{2}\pi$, und der Sinus jeden vielfachen Winkels dieser Formel $= 0$; mithin in Fig. 1. der elliptische Quadrant

$$AMB = \tfrac{1}{2}\pi a(1-\varepsilon^2).m.$$

Für eine Polhöhe (l), die kleiner als L ist, wird sonach auch sein rectificirtes Maaß (s), und die Differenz dieser Bögen, oder

$$\frac{S-s}{1-\varepsilon^2} = m.(L-l) - \tfrac{1}{2}n.(\operatorname{Sin}2L - \operatorname{Sin}2l) + \tfrac{1}{4}p.(\operatorname{Sin}4L - \operatorname{Sin}4l);$$

$$-\tfrac{1}{6}q(\operatorname{Sin}6L - \operatorname{Sin}6l.).\nu + \tfrac{1}{8}v(\operatorname{Sin}8L - 8l) -$$

Setzt man $uL = \varphi$; $ul = \psi$; so ist auch

$$\operatorname{Sin}\varphi - \operatorname{Sin}\psi = 2.\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi).\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi);$$

oder hier $= 2\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}u.(L-l).\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}u(L+l)$;

folglich auch

$$\frac{S-s}{1-\varepsilon^2} = m.(L-l) - n.\operatorname{Sin}(L-l)\operatorname{Cos}(L+l) + \tfrac{1}{2}p.\operatorname{Sin}2.(L-l)\operatorname{Cos}2(L+l);$$

$$-\tfrac{1}{3}q.\operatorname{Sin}3.(L-l).\operatorname{Cos}3.(L+l) + \tfrac{1}{4}v\operatorname{Sin}4.(L-l).\operatorname{Cos}4(L+l) -$$

u. s. w.

Die Größe eines Meridian-Grades für eine geographische Breite zu finden.

VIII. Bezeichnet der Buchstabe A die mittlere geographische Breite eines Meridiangrades, dessen Krümmungs-Halbmesser $= R$ ist (V. VI.); und (g) bezeichnet die Größe des Grades in Metern oder landüblichen Fußen, auf dem Sürfas der Oceane; so ist einmal $180 : 1 = \pi R : g$.

$$G = \frac{\pi R}{180} = \frac{\pi a}{180}.(1-\varepsilon^2).(1-\varepsilon^2\operatorname{Sin}A^2)^{-\frac{3}{2}}; \text{ oder}$$

$$G = \frac{\pi.a(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2.\operatorname{Sin}^2A).\sqrt{(1-\varepsilon^2\operatorname{Sin}^2A)}}.$$

Die

Die Excentricität der Erd-Ellipse zu finden.

Es bezeichne G„H die gemessenen, und auf den See-Horizont reducirten Bogen zweier Meridiangrade, deren Breite in ihrer Mitte (α) und (β) ist; so ist einmal

$$G:H = \frac{\pi.a.(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2\,\mathrm{Sin}^2\alpha)^{\frac{3}{2}}} : \frac{\pi.a.(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2\,\mathrm{Sin}^2\beta)^{\frac{3}{2}}};\quad \text{also}$$

$$\frac{G}{H} = \sqrt{\frac{(1-\varepsilon^2.\mathrm{Sin}^2\beta)^3}{(1-\varepsilon^2.\mathrm{Sin}^2\alpha)^3}};\quad \text{oder}\quad \frac{G^{\frac{2}{3}}}{H^{\frac{2}{3}}} = \frac{1-\varepsilon^2.\mathrm{Sin}^2\beta}{1-\varepsilon^2.\mathrm{Sin}\alpha^2},\quad \text{und}$$

$$G^{\frac{2}{3}} - G^{\frac{2}{3}}.\varepsilon^2.\mathrm{Sin}\alpha^2 = H^{\frac{2}{3}} - H^{\frac{2}{3}}.\varepsilon^2.\mathrm{Sin}\beta^2;$$

$$G^{\frac{2}{3}} - H^{\frac{2}{3}} = \varepsilon^2.(G^{\frac{2}{3}}.\mathrm{Sin}\alpha^2 - H^{\frac{2}{3}}.\mathrm{Sin}\beta^2);$$

$$G^{\frac{2}{3}}.\left[1-\left(\frac{H}{G}\right)^{\frac{2}{3}}\right] = \varepsilon^2.(G^{\frac{2}{3}}.\mathrm{Sin}\alpha^2 - H^{\frac{2}{3}}.\mathrm{Sin}\beta^2);$$

also auch

$$\varepsilon^2 = \frac{G^{\frac{2}{3}}.\left[1-\left(\frac{H}{g}\right)^{\frac{2}{3}}\right]}{G^{\frac{2}{3}}.(\mathrm{Sin}\alpha^2-\left(\frac{H}{G}\right)^{\frac{2}{3}}.\mathrm{Sin}\beta^2} = \frac{1-\left(\frac{H}{g}\right)^{\frac{2}{3}}}{\mathrm{Sin}\alpha^2-\left(\frac{H}{G}\right)^{\frac{2}{3}}.\mathrm{Sin}\beta^2}.$$

Die Oberfläche einer Erd-Zone zu berechnen.

IX. Setzt man in Fig. 1. wie bisher SM = x; MP = η; so ist die Elementar-Zone

$$dU = 2\pi x.\sqrt{dx^2+d\eta^2} = 2\pi x\,dx.\sqrt{1+\frac{d\eta^2}{dx^2}};\quad \text{oder}$$

$$dU = \frac{2\pi.\mathrm{Cos}\alpha}{(1-\varepsilon^2\,\mathrm{Sin}\alpha^2)^{\frac{1}{2}}}.\frac{(1-\varepsilon^2).d\alpha\,\mathrm{Sin}\alpha}{(1-\varepsilon^2\,\mathrm{Sin}\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}.\sqrt{(1+\mathrm{Cotang}\alpha)}.$$

$$dU = \frac{2\pi.(1-\varepsilon^2).d\alpha.\mathrm{Sin}\alpha.\mathrm{Cos}\alpha}{(1-\varepsilon^2\,\mathrm{Sin}\alpha^2)^2}.\mathrm{Cosec}.\alpha;$$

oder weil Cosec. $\alpha = \frac{1}{\mathrm{Sin}\alpha}$; so ist auch

dU

$$dU = \frac{2\pi.(1-\varepsilon^2).d\alpha.\mathrm{Cos}\,\alpha}{(1-\varepsilon^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2)^2} = 2\pi.(1-\varepsilon^2).d\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha.\overline{(1-\varepsilon^2\mathrm{Sin}\,\alpha^2)}^{-2}.$$

a. Nun ist aber

$$\overline{(1-q)}^{-2} = \frac{1}{(1-q)^2} = 1+2q+3q^2+4q^3+5q^4+\ldots;$$

also auch

$$dU = 2\pi.(1-\varepsilon^2).(d\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha + 2.\varepsilon^2.d\alpha.\mathrm{Sin}\,\alpha^2.\mathrm{Cos}\,\alpha + 3.\varepsilon^4.d\alpha.\mathrm{Sin}\,\alpha^4.\mathrm{Cos}\,\alpha + 4.\varepsilon^6.d\alpha.\mathrm{Cos}\,\alpha.\mathrm{Sin}\,\alpha^6 + \ldots$$

Nun ist aber

$$\int d\alpha.\mathrm{Cos}\,\alpha = \mathrm{Sin}\,\alpha;\ \int d\alpha.\mathrm{Sin}\,\alpha^2\,\mathrm{Cos}\,\alpha = \tfrac{1}{3}\mathrm{Sin}\,\alpha^3.$$

$$\int d\alpha.\mathrm{Sin}\,\alpha^4.\mathrm{Cos}\,\alpha = \tfrac{1}{5}\mathrm{Sin}\,\alpha^5;\ \int d\alpha.\mathrm{Sin}\,\alpha^6.\mathrm{Cos}\,\alpha = \tfrac{1}{7}\mathrm{Sin}\,\alpha^7;$$

mithin die Oberfläche der Zone, oder

$$U = 2\pi.(1-\varepsilon^2).(\mathrm{Sin}\,\alpha + \tfrac{2}{3}.\varepsilon^2.\mathrm{Sin}\,\alpha^3 + \tfrac{3}{5}.\varepsilon^4.\mathrm{Sin}\,\alpha^5 + \tfrac{4}{7}.\varepsilon^6.\mathrm{Sin}\,\alpha^7 + \tfrac{5}{9}.\varepsilon^8.\mathrm{Sin}\,\alpha^9.\ \text{u. s. w.};\ \text{oder}$$

$$U = 2\pi.(1-\varepsilon^2).a^2.\mathrm{Sin}\,\alpha\,(1 + \tfrac{2}{3}.\varepsilon^2.\mathrm{Sin}\,\alpha^2 + \tfrac{3}{5}.\varepsilon^4.\mathrm{Sin}\,\alpha^4 + \tfrac{4}{7}.\varepsilon^6.\mathrm{Sin}\,\alpha^6 + \tfrac{5}{9}.\varepsilon^8.\mathrm{Sin}\,\alpha^8.\ \text{u. s. w.}$$

Setzt man $\alpha = 90$ Grade, so ist die Oberfläche der halben Erd-Ellipsoide

$$2\pi.(1-\varepsilon^2).a^2.(1 + \tfrac{2}{3}.\varepsilon^2 + \tfrac{3}{5}.\varepsilon^4 + \tfrac{4}{7}.\varepsilon^6 + \ldots..$$

b. Bezeichnet der Buchstabe (β) die geographische Breite eines Parallels, und ist β kleiner als α; so ist auch die Oberfläche der von dem Aequator und diesem Parallel eingeschlossenen Zone

$$U' = 2\pi.(1-\varepsilon^2).a^2.(\mathrm{Sin}\,\beta + \tfrac{2}{3}.\varepsilon^2.\mathrm{Sin}\,\beta^3 + \tfrac{3}{5}.\varepsilon^4.\mathrm{Sin}\,\beta^5 + \tfrac{4}{7}.\varepsilon^6.\mathrm{Sin}\,\beta^7 + \text{u. s. w.};$$

mithin auch die zwischen beiden Parallelen enthaltene Zone

$$U-U' = 2\pi.(1-\varepsilon^2).a^2.[\mathrm{Sin}\,\alpha - \mathrm{Sin}\,\beta + \tfrac{2}{3}.\varepsilon^2.(\mathrm{Sin}\,\alpha^3 - \mathrm{Sin}\,\beta^3) + \tfrac{3}{5}.\varepsilon^4.(\mathrm{Sin}\,\alpha^5 - \mathrm{Sin}\,\beta^5) + \text{u. s. w.}$$

Nun

Nun ist aber nach der Trigonometrie

$$\text{Sin}\,\varphi^3 = \tfrac{3}{4}\cdot\text{Sin}\,\varphi - \tfrac{1}{4}\,\text{Sin}\,3\varphi.$$

$$\text{Sin}\,\varphi^5 = \tfrac{10}{16}\,\text{Sin}\,\varphi - \tfrac{5}{16}\,\text{Sin}\,3\varphi + \tfrac{1}{16}\,\text{Sin}\,5\varphi.$$

$$\text{Sin}\,\varphi^7 = \tfrac{35}{64}\,\text{Sin}\,\varphi - \tfrac{21}{64}\,\text{Sin}\,3\varphi + \tfrac{7}{64}\,\text{Sin}\,5\varphi - \tfrac{1}{64}\,\text{Sin}\,7\varphi.$$

Ferner ist $\text{Sin}\,\alpha - \text{Sin}\,\beta = 2\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta).\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$; und

$$\text{Sin}\,\mu\alpha - \text{Sin}\,\mu\beta = 2\,\text{Cos}\,\frac{\mu}{2}.(\alpha+\beta).\text{Sin}\,\frac{\mu}{2}.(\alpha-\beta).$$

$$\text{Sin}\,\alpha^3 - \text{Sin}\,\beta^7 = \tfrac{3}{4}(\text{Sin}\,\alpha-\beta) - \tfrac{1}{4}.(\text{Sin}\,3\alpha - \text{Sin}\,3\beta);$$

$$= \tfrac{6}{4}.\text{Cos}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).\text{Sin}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \tfrac{2}{4}\left(\text{Cos}\,\tfrac{3}{2}(\alpha+\beta).\text{Sin}\,\tfrac{3}{2}(\alpha-\beta)\right).$$

$$\text{Sin}\,\alpha^5 - \text{Sin}\,\beta^5 = \tfrac{20}{16}\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta).\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) - \tfrac{10}{16}\,\text{Cos}\,\tfrac{3}{2}(\alpha-\beta).\text{Sin}\,\tfrac{3}{2}(\alpha-\beta)$$
$$+ \tfrac{2}{16}.\text{Cos}\,\tfrac{5}{2}.(\alpha+\beta).\text{Sin}\,\tfrac{5}{2}.(\alpha-\beta).$$

$$\text{Sin}\,\alpha^7 - \text{Sin}\,\beta^7 = \tfrac{70}{64}.\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta).\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) - \tfrac{42}{64}.\text{Cos}\,\tfrac{3}{2}(\alpha+\beta).\text{Sin}\,\tfrac{3}{2}(\alpha-\beta)$$
$$+ \tfrac{14}{64}.\text{Cos}\,\tfrac{5}{2}(\alpha+\beta).\text{Sin}\,\tfrac{5}{2}.(\alpha-\beta) - \tfrac{2}{64}.\text{Cos}\,\tfrac{7}{2}(\alpha+\beta).\text{Sin}\,\tfrac{7}{2}(\alpha-\beta).$$

Werden diese Werthe in obige Reihe substituirt, so ergiebt sich hieraus die Oberfläche der Zone

$$2\pi\left(1-\varepsilon^2\right).a^2.\left\{\begin{array}{l}
\left(2+\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{6}{4}\cdot\varepsilon^2+\tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{20}{16}\varepsilon^4+\tfrac{4}{7}\cdot\tfrac{70}{64}\cdot\varepsilon^6\right)\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta). \\
-\left(\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{2}{4}\cdot\varepsilon^2+\tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{10}{16}\cdot\varepsilon^4+\tfrac{4}{7}\cdot\tfrac{42}{64}\varepsilon^6\right)\text{Cos}\,\tfrac{3}{2}(\alpha+\beta)\,\text{Sin}\,\tfrac{3}{2}(\alpha-\beta). \\
+\left(\tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{2}{16}\cdot\varepsilon^4+\tfrac{4}{7}\cdot\tfrac{14}{64}\cdot\varepsilon^6\right)\text{Cos}\,\tfrac{5}{2}.(\alpha+\beta).\,\text{Sin}\,\tfrac{5}{2}\,(\alpha-\beta). \\
-\tfrac{4}{7}\cdot\tfrac{2}{64}\cdot\varepsilon^4.\,\text{Cos}\,\tfrac{7}{2}(\alpha+\beta).\,\text{Sin}\,\tfrac{7}{2}\,(\alpha-\beta).
\end{array}\right.$$

Ist nun in dieser Formel der Halbmesser des Aequators in geographischen Meilen ausgedrückt, so ergiebt sich nach derselben die Oberfläche der Zone in geographischen Quadratmeilen.

Der sphärische Excess.

X. Bey der Reduction eines sphärischen Dreyecks auf ein geradlinichtes suchet man eigentlich die Differenz

der

der Summe der Winkel der erstern, über die Winkel-Summe des letztern; und heißet diese Differenz den sphärischen Exceß, welchen ich nun vorerst, nach Legendre, für Dreyecke, wie sie bey geographischen Operationen gewöhnlich vorkommen, aufsuche.

Werden nemlich die Winkel eines sphärischen Dreyecks mit $A_{\prime\prime}B_{\prime\prime}C$, und die ihnen entgegen stehende Seiten mit den gleichnamigen Buchstaben des kleinen Alphabets bezeichnet, und das Dreyeck selbst befindet sich auf einer Kugel von dem Halbmesser $= 1$. verzeichnet; so ist bekanntlich

$$\text{Cos } A = \frac{\text{Cos } \alpha - \text{Cos } \beta \,.\, \text{Cos } \gamma}{\text{Sin } \beta \,.\, \text{Sin } \gamma}.$$

Es sey nun das Dreyeck ABC auf der das Ellipsoid osculirenden Sphäre von dem mittlern Halbmesser $AM = r$ und seine Seiten $a_{\prime\prime}b_{\prime\prime}c$; so ist auch

$$\alpha : a = 1 : \frac{1}{r}; \quad \text{oder} \quad \alpha = \frac{a}{r}; \quad \text{mithin auch}$$

$$\text{Cos } A = \frac{\text{Cos } \frac{a}{r} - \text{Cos } \frac{b}{r} \text{ Cos } \frac{c}{r}}{\text{Sin } \frac{b}{r} \,.\, \text{Sin } \frac{c}{r}}.$$

Weil nun der Halbmesser (r) in Vergleich mit den Seiten des Dreyecks immer außerordentlich groß ist, so kann man auch setzen

$$\text{Cos } \alpha = \text{Cos } \frac{\alpha}{r} = 1 - \tfrac{1}{2}\frac{a^2}{r^2} + \frac{a^4}{6 \,.\, r^4}$$

$$\text{Sin } \frac{b}{r} = \frac{b}{r} - \frac{b^3}{6\,r^3}; \quad \text{woraus sich ergiebt}$$

$$\text{Cos } A = \frac{\left(1 - \frac{a^2}{2\,r^2}\right) - \left(1 - \frac{b^2}{2\,r^2}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2\,r^2}\right)}{\left(\frac{b}{r} - \frac{b^3}{6r^3}\right) \cdot \left(\frac{c}{r} - \frac{c^3}{6\,r^3}\right)}; \quad \text{oder}$$

Cos

$$\text{Cos A} = \frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2r^2} + \frac{a^4-b^4-c^4}{24r^4} - \frac{b^2 . c^2}{4r^4}}{\frac{bc}{r^2}\left(1 - \frac{b^2}{6r^2} - \frac{c^2}{6r^2}\right)} .$$

Dividiret man Zähler und Nenner dieses Bruchs mit $1 + \frac{b^2+c^2}{6r^2}$, so wird hieraus

$$\text{Cos A} = \frac{b+c^2-a^2}{2bc} + \frac{a^4+b^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2}{24bc.r^2} .$$

Ziehet man ferner in dem Dreyeck ABC in Fig. 6. seine Chorden, und bezeichnet seinen Winkel in dem Puncte A mit A′, so ist bekanntlich in dem geradlinichten Dreyeck

$$\text{Cos A}' = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} .$$

oder $1 - \text{Sin}^2 . A' = \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2$;

woraus sich ergiebt

$$4b^2.c^2.\text{Sin}^2 . A = -(a^4+b^4+c^4-2a^2c^2-2b^2c^2-2a^2b^2).$$

Werden diese Werthe substituirt, so ergiebt sich hieraus

$$\text{Cos A} = \text{Cos A}' - \frac{bc.\text{Sin}^2.A'}{6r^2} .$$

Es sey nun $A = A' + x$; so ist bekanntlich

$$\text{Cos}(A'+x) = \text{Cos A}' . \text{Cos x} - \text{Sin A}' . \text{Sin x} ;$$

oder weil x immer nur ein sehr kleiner Winkel ist, so ist auch $\text{Cos A} = \text{Cos A}' - x . \text{Sin A}'$; mithin auch

$$\text{Cos A}' - \frac{bc.\text{Sin}^2 A}{6r^2} = \text{Cos A}' - x . \text{Sin A}' ; \text{ folglich}$$

$$x = \frac{bc.\text{Sin A}'}{6r^2} ; \text{ und } A' = A - \frac{bc.\text{Sin A}'}{6r^2} .$$

Nun ist aber die Fläche des geradlinichten Dreyecks ABC gleich $\frac{1}{2} bc . \text{Sin A}' = S$; mithin auch

$$A' = A - \frac{S}{3r^2} ; \quad B' = B - \frac{S}{3r^2} ; \quad C' = C - \frac{S}{3r^2} ;$$

also alle drey Winkel des Dreyecks zusammen

$$A'+B'+C' = 180 = A+B+C-\frac{3S}{3r^2};$$

und es ist sonach der Ueberschuß der drey sphärischen Winkel des Dreyecks ABC, über seine geradlinichten Winkel, oder der sphärische Exceß des Dreyecks in Secunden

$$\text{gleich } \frac{S}{r^2} \cdot 206264;$$

mithin verhalten sich auch die Excesse sphärischer Dreyecke wie ihre Flächen.

a. Es sey z. E. für ein sphärisches Dreyeck ABC in Fig. 23., die Seite AB=a=53400 Metre, die Seite AC=b=50260 Metre, der Winkel A=60 Grade; und sein Erdhalbmesser r=6365206 Metre.

Betrachtet man nun dieß Dreyeck indessen als geradlinicht, so ist sein Perpendikel CD=b. Sin. A; mithin seine Fläche

$$S=\frac{bc.\,\text{Sin. A}}{2}.$$

Nun ist aber log 206264=5,3144552; und log r=6,8038126; also 2 log r=13,6076252; mithin die constante Größe in dem Ausdruck für den Exceß

log 206264 =	5,3144552.
2 log r =	13,6076252
	1,7068300—10.
log c =	4,7275413.
log b =	4,7012518.
l. Sin A =	9,9235914—10
	19,3523845—10
log 2 =	0,3010800
	9,0513545.
	0,7068300—9
	9,7581845—9.

Absolutzahl 5,7304.

Der sphärische Exceß für dieses Dreyeck wäre also 5,73 Secunden.

b. Je kleiner demnach die Seiten eines Dreyecks sind, um so kleiner ist sein sphärischer Exceß; er verschwindet ganz, wenn die Seiten des sphärischen Dreyecks so kurz sind, daß man sie füglich für geradlinicht halten kann.

Da nun die geodätische Aufnahme eines Landes sich nur auf geradlinichte Dreyecke fundiret, so lassen sich die Gränzen einer solchen Aufnahme, innerhalb welcher dieselbe sich noch ohne bedeutenden Fehler erstrecken kann, folgendermaßen finden.

Nehme ich nemlich vorerst ein sphärisches Dreyeck an, dessen Exceß nur eine Secunde ist, so ist dieß füglich ein so kleiner Theil, für welchen man nicht mehr stehen kann.

Setze ich ferner den Halbmesser der Krümmung des Landes III. b. dem Halbmesser unserer Erde oder 860 geographische Meilen, so ist für jenes gleichseitige sphärische Dreyeck, dessen jede Seite (x) solche Meilen mißt, der sphärische Exceß $\frac{\frac{1}{2} x^2 . \text{Sin } 60}{860^2}$; mithin nach jener Voraussetzung $\frac{x^2 . \text{Sin } 60}{2 . 860^2} + 206264 = 1$; und $x = 2{,}88$. geographische Meilen.

Geht nun die Aufnahme des Staates von seiner Mitte aus, so kann deswegen die geodätische Messung sich höchstens auf einen Staat erstrecken, dessen größte Ausdehnung in die Länge und Breite 5,76 oder höchstens 6 ganze Meilen hat, oder 36 Quadratmeilen Flächeninhalts ist.

Mißt nun ein Grad 15 geogr. Meilen, so mißt jene Seite des Dreyecks $\frac{3}{15}$ oder $\frac{1}{5}$ Grad. Da ferner der

Bogen

Bogen von 12 Minuten = 0,00581776 und seine Tangente 0,00581775 ist, so ist die wahre auf dem Fürfas liegende gekrümmte Seite dieses Dreyecks nur um $\frac{860.20000}{10000\,0000}$ oder $\frac{81}{1000}$ eines Fußes, von der geradlinichten verschieden; wenn man die geogr. Meile zu 20000 Fußen annimmt.

Die Fläche eines sphärischen Dreyecks auf der Erde in Quadratgraden.

Die Fläche einer Kugel ist nach geometrischen Principien immer 4mal größer, als die Fläche ihres größten Kreises.

Betrachtet man daher unsere Erde als eine Sphäre von dem Halbmesser = r, so ist ihre Oberfläche $2\pi r.\frac{1}{2}r.4 = 2\pi r.2r$; auch ist der Halbmesser (r) als die Chorde von 60 Graden, nach Graden der Sphäre 57,2953795.. Grade, oder $57\frac{3}{10}$ Grade beinahe; und ein Grad der Erde 15 geographische Meilen.

Will man nun die Oberfläche der Erde nach Quadratgraden ausdrücken, so ist auch $2\pi r = 360$ Grade; mithin ihre Oberfläche 360.2r oder 360.114,6 = 41256 Quadratgrade.

a. Denkt man sich auf der Sphäre ein Dreyeck ABC, dessan Winkel A„B„C bezeichnen, und verlängert seine Seiten um die ganze Sphäre herum, so sind diese größte Kreise, deren jeder die Sphäre bisectiret, und die Winkelpuncte dieses Dreyecks sind die Pole dieser Kreise. Fig. 3.

Auch ist das Dreyeck FAE auf der Vorderseite, dem Dreyeck CDB, auf der Hinterseite der Sphäre gleich; oder beide Dreyecke sind auf der Kugel symmetrische, so wie die Dreyecke AEB und FCD u. s. w.

Da ferner die Flächen aller Kugelausschnitte zur ganzen Kugel sich wie ihre Polarwinkel zum ganzen Kreise verhalten, so verhält sich auch die Fläche des Ausschnitts ACDBA, wie A.2r; oder die Fläche der Dreyecke ABC + DBC verhält sich wie A.2r; oder $\Delta ABC + \Delta DBC = A.2r$; oder $\Delta ABC + \Delta.FAE = A.2r$.

Eben so ist auch $\Delta.ABC + \Delta AFB = C.2r$; und $\Delta ABC + \Delta AEC = B.2r$.

Addiret man diese 3 Gleichungen, so ist

$3.\Delta ABC + \Delta FAC + \Delta AFB + \Delta AEC = (A+B+C)2r.$

und die halbe Oberfläche der Sphäre oder $180.2r =$ $\Delta.ABC + FAE + AFB + AEC$.

Ziehet man letztere Gleichung von der erstern ab, so ist

$$2.\Delta ABC = (A+B+C)2r - 180.2r; \text{ also}$$
$$\Delta.ABC = (A+B+C-180)r.$$

Man findet daher, nach Hrn. Benzenberg, die Fläche eines Dreyecks in Quadratgraden, wenn man seine 3 Winkel addiret, davon 180 subtrahiret, und den Rest mit den in Graden ausgedrückten Halbmesser der Sphäre multipliciret.

Es sey z. E. $A = 86°\,26'$; $B = 69°\,8'$; $C = 89°\,46'$; so ist $A+B+C = 245°\,10'$; mithin die Fläche des

$\Delta.ABC = (245°\,10' - 180)r = 65\frac{1}{6}.57\frac{3}{10} = 3717,4.$

Quadratgraden.

Nun mißt ein Quadratgrad auf der Erde 15.15 oder 225 Quadratmeilen; also das Dreyeck 836315 geographische Quadratmeilen.

b. Wäre die Fläche eines sphärischen Dreyecks auf der Erde in Quadratmeilen bekannt, so kann man aus dieser Gleichung auch rückwärts die Summe seiner drey Winkel finden.

Setzt man für das vorige Dreyeck die Summe seiner 3 Winkel $= Z$, und dividirt seine Fläche mit 225,

so

so ist $(Z-180)\,57{,}3 = \frac{836315}{225} = 3717{,}4$;

$$Z = \frac{3717{,}4}{57{,}3} + 180 = 65°\,10' + 180 = 245°\,10'.$$

Auf unserer Erde ist eine Quadratmeile $\frac{1}{15^2}$ oder $\frac{1}{225}$ eines Quadratgrades; also für ein Dreyeck von einer Quadratmeile

$$Z = 180 + \frac{1}{225 \cdot 57{,}3} = 180 + \frac{1}{12892{,}5} = 180°\,0'\,0'',279;$$

mithin sein sphärischer Exceß (X.) 0,279 Secunden.

§. 3.

Betrachtungen über das Sehen naher und entfernter Gegenstände.

Der kleinste Sehewinkel beim deutlichsten Sehen.

I. Der Geograph, wie der Geodät, ziehet bey seinen technischen Arbeiten auf dem Papier feine Linien mit schwarzer Tusche, oder auch nur mit der Punctirnadel einzeln, oder auch in ganzen Partien bey Schraffirungen; siehet diese am deutlichsten, wenn er sein Auge so weit von ihnen entfernet, daß ihr Bild auf die Netzhaut des Auges selbst trift, während das durch die hehre Atmosphäre erleuchtete Papier, durch dieselbe eine Erleuchtung genießet, welche dem Auge die angenehmste oder convenabelste ist.

Dieser Abstand des Auges von dem Papier heißt nun seine Gesichtsferne für solche Striche, bey der zuträglichsten Erleuchtung; es siehet unter den Strichen von verschiedener Breite, das Auge nichts desto weniger, auch bey den günstigsten Umständen, Striche von gewisser Feinheit kaum mehr, so daß, wenn sie noch feiner wären,

das

das Auge sie nicht mehr sehen, oder sie ihm verschwindend werden müßten.

Daher bestehet für jedes Auge ein kleinster Sehewinkel, unter welchen ihm seine Striche, welche es in seiner Gesichtsferne bey der convenabelsten Erleuchtung siehet, nahe zu verschwinden; und rücksichtlich dieses Winkels lehret die Erfahrung, daß er für scharfsichtige Augen öfters außerordentlich klein seye.

So siehet der Kupferstecher auf dem weißen Grunde seiner Platte das feinste Ritzchen, das dieser durch Zufall erhält; der Juwelier siehet die feinste Feder, welche sein Diamant von Natur hat, und die feinste Spitze, in welche sich seine Facetten verlaufen, u. dgl.

a. Dieser kleinste Sehewinkel lässet sich meines Erachtens auf folgende Art am schicklichsten finden.

Ich legte eine der feinsten Schraffirung unter ein Mikroscop von 16maliger Vergrößerung, während ich mit dem andern Auge nach einem schwarzen Haar auf weissem Papier sehe, von welchem 40 Wunde über einen Bleystiften aufgewunden, gerade 8:1000 Theile eines Nürnberger Fußes maaßen.

Dabey scheinen mir die feinsten Striche, die ich unter der günstigsten Erleuchtung in meiner Gesichtsferne von $\frac{1}{2}$ Fuß kaum mehr sehe, in dem Mikroscop gerade so breit zu seyn, als dieß Haar, das ich mit dem andern Auge gleichzeitig in $\frac{1}{2}$ Fuß Abstand am deutlichsten sehe.

Nun war aber die Breite dieses Haars

$$\frac{8}{40.1000} = \frac{1}{5000}$$

eines Nürnberger Fußes; mithin die Breite der feinsten Linien jener Schraffirung $\frac{1}{16.5000}$ oder $\frac{1}{80000}$ dieses Fußes; mithin sein Sehewinkel $\frac{206264}{80000.\frac{1}{2}} = 5$ Secunden.

Was

Was also bey schwarz auf weiß, unter der besten Erleuchtung in meiner Gesichtsferne sich kleiner zeiget, kann ich nicht mehr sehen; und dennoch ist mein, durch den Betrieb des Kunstfachs sehr geübtes Auge noch keines der beßten.

Dagegen sehe ich eine schwarze Linie auf weißem Papier in meiner Gesichtsferne, unter der convenabelsten Erleuchtung noch sehr gut, wenn sie 4mal breiter als jene ist.

Anders verhält sichs mit Linien, die nach ihrer Farbe auf ihrem Hintergrund nicht so gut wie schwarz auf weiß abstechen; z. E. mit Strichen auf den Branderschen Glasmikrometern, oder mit Strichen, die mit der Reiß- oder Punctirnadel auf Papier gezogen werden, und dieses auf ihrem Wege nur glätten; so daß eine solche Linie nur durch ihren Glanz auf dem Papier sichtbar wird.

Auf jenen Mikrometern ist die breite ihrer Striche beyläufig $\frac{1}{3000}$ eines Nürnberger Fußes, und dennoch sehe ich sie in meiner Gesichtsferne noch ganz deutlich, wenn ich das Glas gegen die Atmosphäre halte; für Linien mit der Nadel auf Velinpapier gezogen, habe ich dagegen den kleinsten Sehewinkel für meine Gesichtsferne, bey der besten Erleuchtung, auf vorige Art zu 20 Secunden gefunden; indem ich mich eines weißen Haars auf weißem Papier dazu bediente.

b. Betrachtet das Auge die nemliche Schraffirung bey einer schwächern Erleuchtung in der vorigen Gesichtsferne (a), so siehet es dieselbe um so undeutlicher, je geringer die Erleuchtung in Vergleich mit jener convenabelsten ist, bey welcher es die Schraffirung am deutlichsten sahe; es scheinet ihm ein schwarzer Strich auf weißem Grunde, und ein weißer auf schwarzem Grunde, um so schmäler zu werden, je feiner er an und für sich, und je geringer die Erleuchtung ist.

Je

Je schwächer also die Klarheit des Bildes der Schraffirung bey einer geringen Erleuchtung ist, um so undeutlicher siehet das Auge das Ganze; und der Streifen oder Punct, welchen das Auge gerade noch bemerken kann, muß um so breiter seyn.

Verhält sich die convenabelste Klarheit, in welcher das Auge die Schraffirung in seiner Gesichtsferne am deutlichsten siehet, zu ihrer Klarheit bey der geringen Erleuchtung wie 1:p; wo also (p) einen Bruch abgiebt. und ist (α) der kleinste Sehewinkel beim deutlichsten Sehen, so lässet sich im Allgemeinen, der kleinste Sehewinkel für das undeutliche Sehen durch $\alpha . \sqrt[q]{\frac{1}{p}}$. ausdrücken.

Für mein Auge wäre $\alpha = 5$ Secunden; und der Exponent $q = 6$. Sehe ich nun die Schraffirung in einer Klarheit oder Lichtdichte, die $\frac{1}{100}$ der meinem Auge convenabelsten ist, so ist für dieselbe der kleinste Sehewinkel jenes Strichs, den ich kaum mehr bemerken kann, $5 . \sqrt[6]{100} = 5 . 2{,}154 = 10{,}8$ Secunden.

Da sich nun die Deutlichkeit, mit welcher das Auge einen Gegenstand siehet, nach dem kleinsten auf ihm in der Gesichtsferne noch sichtbaren Punct proportioniret, so wäre die Deutlichkeit des Sehens bey jener Klarheit nur $\frac{5}{108}$ der größten oder normalen Deutlichkeit seines Sehens.

c. Diese Deutlichkeit, in welcher wir bey schwacher Erleuchtung die Schraffirung sehen, wird zwar etwas größer, wenn wir ihr das Auge etwas annähern; sie kann aber nie der größten Deutlichkeit gleich kommen; weil das Bild sich um so weiter hinter der Netzhaut constituiren will, je mehr wir das Auge dem Gegenstand annähern, und dadurch die Lichtkegel sich in eine um so größere Diffusionsfläche verbreiten, die sonst nur in unendlich feinen Spitzen sich verlaufen würden.

d. Be-

d. Betrachtet das Auge die Schraffirung oder den Gegenstand A, durch ein einfaches Ocular, oder auch durch eine Luppe von (n)maliger Vergrößerung, so siehet es unter den nemlichen äußern Umständen auf demselben auch einen (n)mal feinern Strich beinahe verschwindend; wenn die Oeffnung des Glases so weit, und die Vergrößerung so beschaffen ist, daß das Auge den Gegenstand durch die Luppe eben so helle, als mit blosem Auge, bey seiner convenabelsten Erleuchtung siehet.

Uebrigens findet man die Vergrößerung der Luppe, nach dem Verfahren des Hrn. Herschels, folgendermaßen:

Ein Drath auf eine Spule dichte aufgewunden, maß in 14 Wunden gerade 32 : 1000 des Nürnberger Fußes: als ich nun diesen durch eine Linse betrachtete, schien er mir gerade so dick als ein anderer Drath von 7 : 1000 dieses Fußes zu seyn, den ich in meiner Gesichtsferne mit dem andern gleichzeitig betrachte. Dieß Glas vergrößert mir also jeden Gegenstand, den ich durch dasselbe aufs deutlichste sehe, in dem Verhältniß $\frac{32}{14000} : \frac{7}{1000}$; oder 16 : 49 das $3\frac{1}{16}$ mal.

Der kleinste Sehewinkel beim undeutlichen Sehen.

II. Ganz anders verhält sichs statt dessen mit dem kleinsten Sehepunct, wenn wir einen Gegenstaud außer unserer Gesichtsferne undeutlich sehen!

Bringt nemlich der Beobachter den Gegenstand A in (I.) bey bestehenden äußern Umständen außer seiner Gesichtsferne, so fällt sein Bild nun vor die Netzhaut des Auges, und seine Lichtkegel gehen hinter ihm divergent nach derselben, und entwerfen auf ihr von dem Gegenstande ein Afterbild.

a. In

a. In diesem Bilde durchkreuzen oder irradiiren sich die Lichtkegel des wahren Bildes um so mehr, oder sie greifen um so weiter in einander ein, je weiter das wahre Bild selbst, nach dem großen Abstand des Gegenstandes vom Auge, vor die Netzhaut fällt; und das Afterbild wird dadurch an seinem Rande um den Zerstreuungs- oder Diffusionsraum größer, in welchen sich die divergenten Strahlen des wahren Bildes auf der Netzhaut verbreiten; es wird dabey im Ganzen und in seinem Detail um so undeutlicher gesehen, je geringer der Effect, der sich diffundirenden Strahlen des Afterbildes, auf die Netzhaut ist.

Der kleinste Punct, welcher auf dem Gegenstand in der Gesichtsferne kaum noch sichtbar war (I.), verschwindet daher dem Auge plötzlich, so wie das Auge sich von ihm in soweit entfernt, daß der Eindruck seines Afterbildes anf die Netzhaut, neben dem Eindruck des Ganzen unfühlbar wird: es verschwinden so dem Auge immer breitere Puncte oder Striche, je weiter sich das Auge von ihnen entfernt; es verschwindet endlich der ganze Gegenstand A dem Auge selbst, wenn dieses sich in soweit von ihm entfernt, daß der Eindruck seines Afterbildes auf die Netzhaut unfühlbar wird.

Dividiret man den Ueberschuß des Afterbildes über das wahre, durch die Seheaxe des Auges, so erhält man den Irradiations- oder Diffusionswinkel, um welchen sich jeder Punct und Strich der Schraffirung breiter zeiget, als er wirklich ist; es verschwindet daher ein feiner Strich um so bälder, je kleiner sein optischer Winkel, und je größer sein Diffusionswinkel ist.

So verschwindet mir auf jener Schraffirung eine schwarze feine Linie von $\frac{1}{2\,7\,5\,0\,0}$ eines Nürnberger Fußes, schon in einem Abstand von 12 Zollen, oder unter einem Winkel von 8 Secunden, bey der convenabelsten Erleuchtung;

tung; es verschwindet mir dagegen ein feines weißes Haar in freier Luft, unter einem 5mal größern Winkel oder unter 40 Secunden.

b. Hat der Limbus des Winkelmessers eines Geographen eine Erleuchtung, wobey sich seine Theilstriche in seiner Gesichtsferne am deutlichsten zeigen (I.); so verschwinden ihm dieselbe, so wie er sein Auge so weit vom Limbus entfernt, daß der Eindruck ihres Afterbildes auf die Netzhaut unfühlbar wird.

Ist ein andermal die Erleuchtung des Limbi geringer, so siehet er seine Theilstriche in einer um so geringern Deutlichkeit, je geringer die Erleuchtung an und für sich ist (I. b.); sie verschwinden ihm daher auch um so bälder, oder in um so kürzerm Abstand vom Auge.

Verschwinden z. E. seinem Auge die Theilstriche in 14 Zoll Abstand, bey der dem Auge convenabelsten Erleuchtung, während sie ein andermal bey schwächerer Erleuchtung ihm schon in 10 Zollen Abstand verschwinden, so überzeuget sich der Beobachter, daß er den Limbus um so undeutlicher siehet, je kürzer der Abstand ist, in welchem ihm seine Theilstriche verschwinden: er kann hieraus Folgerungen auf die Zuverläßigkeit abnehmen, mit welcher er bey verschiedener Erleuchtung, einen Winkel auf dem Limbus ablesen kann; wie ich in der Folge zeigen werde.

Der Irradiations-Winkel des Auges.

III. Betrachten wir einen Gegenstand in unserer Gesichtsferne bey der convenabelsten Erleuchtung mit der größten Deutlichkeit (I.), so können wir auf ihm Linien und Puncte noch von einander unterscheiden, die nicht kleiner sind, als daß sie auf ihm unserm Auge verschwinden müssen; wir können ihren Abstand, in welchem sie

neben

neben einander stehen, noch unterscheiden, wenn er nicht kleiner ist, als daß das Auge die Wirkung des Strahlenkegels noch empfinden kann, der von dem zwischen ihnen liegenden Hintergrund in dasselbe kommt.

Siehet statt dessen das Auge auf dem Gegenstande zwey einander nahe Puncte a„b„ bey der convenabelsten Erleuchtung in einer Entfernung, wornach ihre Bilder vor die Netzhaut fallen müssen (II.), so gehen ihre Lichtkegel hinter dem Bilde divergent aus einander, und constituiren auf der Netzhaut selbst ihr Afterbild; das um so größer und matter in Vergleich mit dem wahren Bild derselben ist, je größer nach dem Abstand des wahren Bildes von der Netzhaut die Divergenz der Lichtkegel, und mit dieser auch das Afterbild gegen das wahre ist.

Sind nun die Puncte a„b auf dem Gegenstande einander so nahe, daß die vom Auge noch empfindbaren Ränder ihrer Afterbilder sich berühren, so glaubt deswegen das Auge, daß sich die Puncte auf dem Objecte selbst berühren: es irret sich daher in dem Abstand dieser Bilder neben einander um so mehr, je größer der Ueberschuß ihrer Afterbilder über ihre wahre Bilder im Auge, oder je größer ihre Irradiation oder der Diffusionsraum ist, in welcher sich ihr Licht auf der Netzhaut zerstreuet.

Dividirt man diesen Unterschied durch die Sehe-Axe des Auges, so erhält man in demselben die Tangente des Irradiationswinkels beider Puncte.

Eben so verhält sichs auch mit Streifen, die nach ihrer Farbe auf ihrem Hintergrund abstechen; beide scheinen sich in gewissem Abstand zu berühren, so wie die Ränder ihrer Afterbilder im Auge sich berühren. Als ich zwey weiße Streifen über schwarzem Grunde einander bis auf $\frac{3}{1000}$ eines Nürnberger Fußes genähert, und das Auge bis auf 6 Fuße von ihnen entfernt hatte, ver-

schwand

schwand mir jenes Intervall, und ich glaubte die weißen Streifen in ihrer Continuität zu sehen.

Der Irradiationswinkel war also hier $\frac{3}{1000.6}$ 206264 = 103 Secunden.

Befinden sich in einem gewissen Abstand senkrecht stehende, oder sonst in ihren benachbarten Seitenflächen parallele Körper nahe beisammen, so scheinen uns auch diese sich zu berühren, wenn die Ränder ihrer Afterbilder sich auf der Netzhaut tangiren.

Als ich zwey runde Absteckstangen von Fichtenholz auf freyem Felde neben einander steckte, so daß ihre benachbarten Ränder um einen Nürnberger Zoll von einander abstunden, so glaubte ich in 100 Fußen Abstand, daß beide Stangen sich berührten, während die Wolken am Horizont ihren Hintergrund abgaben. Für diese durch den Gebrauch graulicht angelaufene Stangen war also der Irradiationswinkel meines Auges bey diesem Hintergrund $\frac{206264}{12.100.}$ = 171 Secunden.

Der kleinste dioptersche Sehewinkel für Fernröhre.

IV. Betrachten wir einen entfernten Gegenstand B durch ein Fernrohr, das keine Längenabweichung und Farbenzerstreuung auf der Axe seines letzten Oculars hat, so transferiret dieses bey gehöriger Stellung seiner Gläser, das dioptrische Bild des Gegenstandes, unmittelbar auf die Netzhaut des Auges selbst: wir sehen ihn in dem Fernrohr eben so deutlich, wie wir ein von ihm entworfenes Miniaturgemälde, in unserer Gesichtsferne (I.), unter einem gleichen, durchs Fernrohr vergrößerten optischen Winkel bey einer Erleuchtung sehen, wornach sich das Gemälde in diesen Abstand eben

so

so helle oder klar wie der Gegenstand B im Fernrohr selbst zeiget.

a. Wäre diese Klarheit die dem Auge convenabelste (I.), so würde dasselbe in dem Fernrohr eine Stelle auf dem entfernten Gegenstand kaum mehr sehen, die nach ihrer Feinheit nach der Entfernung des B, sich unter einem Winkel im Fernrohr präsentiret, der jenem gleich ist, in welchem dem Auge auf seinem Miniaturgemälde, fein der Stelle zukömmlicher oder adäquater Theil oder Streifen beinahe verschwindet.

Verschwindet z. E. meinem Auge auf der Schraffirung (I.) ein schwarzer Streifen auf weißem Grunde, unter einem Winkel von 5 Secunden, bey einer meinen Augen convenabelsten Klarheit, so würde ich deswegen durch jenes Fernrohr von (m)maliger Vergrößerung auf dem weißen Gegenstand B, einen schwarzen Streifen kaum mehr bemerken, der sich mir in demselben unter einem dioptrischen Winkel von 5 Secunden zeiget, und ich werde den Streifen in dem Fernrohr eben so deutlich, wie jenen auf dem A sehen. Hätte nun der Streifen die Breite (a), und stünde er vom Auge um (d) Fuße ab, und bezeichnet (φ) seinen optischen Winkel; so ist hier

5

$m\varphi = 5$ Secunden; $\varphi = \frac{5}{m}$ Secunden; und

$$a = d. \text{ tang } \frac{5}{m}.$$

b. Wäre die Helligkeit, in welcher der Beobachter den weit entfernten Gegenstand B nach seiner Verschleyerung durch die Luft, im Fernrohr siehet, unter der convenabelsten seines Auges, so würde er ihn eben so sehen, wie er sein Miniaturgemälde in seiner Gesichtsferne siehet, zu einer Zeit, wo dieses eine Erleuchtung hat, nach welcher er dasselbe eben so helle wie den Gegenstand im Fernrohr siehet.

Wäre

Wäre die Klarheit des dioptrischen Bildes 100mal geringer, als seine dem Auge convenabelste, und verschwindet mir bey derselben ein Punct von 5 Secunden scheinbarem Halbmesser, so würde ich nach (I. b.) auf dem Gegenstande B einen Strich kaum mehr erkennen, der sich mir in dem Fernrohr unter einem dioptrischen Winkel von 10,8 Secunden präsentiret.

c. Ist der entfernte Gegenstand so klein, oder auch in größerm Durchschnitt so weit von dem Auge entfernt, daß er in dem Fernrohr ohne Längenabweichung, kaum mehr gesehen werden kann, während ihm die Luft selbst den Hintergrund abgiebt, wie z. E. ein Signal-Stamm, oder Baum am äußersten Horizonte, so werde ich ihn in dem Fernrohr eben so sehen, als ich z. E. ein Haar von seiner Farbe in meiner Gesichtferne unter einer Erleuchtung sehe, wornach mir dieses so helle wie der Stamm im Fernrohr erscheinet.

Nun verschwindet mir aber ein braunes Haar in meiner Gesichtferne, auch bey der convenabelsten Erleuchtung unter einem Winkel von 7 Secunden; ich werde daher auch einen braunen Signal-Stamm in dem Fernrohr unter einem dioptrischen Winkel von 7 Secunden kaum mehr sehen, wenn das Gesichtsfeld des Fernrohrs so helle ist, wie die Tageshelle des hehren Himmels: ich werde ihn bey einer (p)mal geringern Helle unter einem Winkel von $7 . \sqrt[6]{\frac{1}{p}}$ kaum mehr sehen (I. b.).

d. Ganz anders verhält sichs statt dessen mit dem dioptrischen kleinsten Sehewinkel eines Fernrohres, das eine Längenabweichung nach der Figur seiner Gläser und eine Farbenzerstreuung nach ihrer Substanz hat!

Denn bey einem solchen Fernrohr vereinigen sich die von einem Punct (k) des Objects auf den Rand der Glä-

Gläser fallende Randstrahlen in einem Punct (f) hinter dem letzten Oculare, während gleichzeitig die von dem (k) in die Mitte der Gläser treffende Kernstrahlen sich in einem Puncte (g) hinter diesem Glase sammlen, der weiter hinter ihm als der Punct (f) ablieget; es ist bekanntlich der Unterschied der Abstände dieser Puncte, die sphärische Längen-Abweichung auf der Axe des Fernrohrs.

Wenn nun der Beobachter die Gläser seines Fernrohrs so stellet, daß die von dem (g) Punct ins Auge kommende Strahlen auf die Netzhaut selbst transferirt werden, so fället das Bild des (f) Punctes um so weiter vor die Netzhaut, je kurzsichtiger das Auge und je größer die Längenabweichung wird.

Da nun der Lichtkegel des (f) Bildes hinter sich divergent aus einander nach der Netzhaut gehet, so diffundiret sich auf derselben nicht nur das Bild des (g) mit dem Afterbild des (f) auf der Netzhaut, sondern das Afterbild des (g) gewinnt einen um so größern Diffusionsraum auf derselben, je mehr sein Bild vor die Netzhaut trift; theilet man daher den Ueberschuß des Afterbildes über das wahre durch die Seheaxe des Auges, so erhält man die Tangente des Diffusionswinkels des Fernrohrs für das Auge seines Beobachters.

Dieß hat nun einmal die Folge, daß wir den Punct (k) des Objects, und mit ihm jeden andern desselben um so undeutlicher sehen, je mehr sein Licht sich auf der Netzhaut diffundirt; wir sehen außerdem auch das Object selbst immer um den Diffusionswinkel größer, als es wirklich ist.

Diese Undeutlichkeit des Sehens nimmt noch um so mehr zu, wenn die Gläser des Fernrohrs farbichtes Licht zerstreuen: es finden die rothen Strahlen ihre Vereinigungspuncte weiter hinter dem letzten Ocular,

als

als alle übrige; und die farbichten Bilder der übrigen diffundiren sich daher mit dem rothen Lichte; es färbet sich der Gegenstand in seiner Farbe um so mehr ab, je mehr der Effect des Lichts, durch die Diffusion seiner Farben, auf die Netzhaut geschwächt wird.

Wenn also ein Fernrohr eine Längen-Abweichung und Farben-Zerstreuung hat, so können wir in demselben keinen Gegenstand mit der größten oder normalen Deutlichkeit, auch selbst bey der convenabelsten Klarheit sehen; wir sehen ihn um so undeutlicher, je größer sein Diffusionswinkel für das Auge des Beobachters an und für sich, und in Vergleich mit dem dioptrischen Winkel des Objects ist; wir sehen ihn noch um so undeutlicher, je größer die Farben-Zerstreuung des Fernrohrs, und je schwächer die Helligkeit ist, in welcher wir ihn nach seiner Lichtstärke, und nach der Verschleyerung des weit entfernten Gegenstandes durch die Luft sehen; wir sehen ihn überhaupt eben so undeutlich, als wir sein Miniaturgemälde (a.) in der Helligkeit seines dioptrischen Bildes, in einem Abstand vom Auge sehen, in welchem dessen wahres Bild sich auf der Netzhaut eben so stark wie sein dioptrisches diffundiret.

e. Befinden sich zwey gleich weit entfernte Objecte C„D sehr nahe neben einander, so constituirt sich von jedem derselben ein Diffusionsbild im Auge, dessen Randstrahlen vom Auge um so weiter empfunden werden, als ihr Eindruck nach der Erleuchtung der Gegenstände, nach ihrer Farbe und Hintergrund, und nach ihrer Verschleyerung durch die Luft, größer als ein andermal unter weniger günstigen äußern Umständen ist.

Sind nun diese Bilder sich auf der Netzhaut so nahe, daß ihre Ränder, so weit sie vom Auge empfunden werden, sich irradiiren, so hält sich der Beobachter über-

zeugt, daß die Gegenstände sich wirklich berühren; und es ist sonach der Winkel, um welchen die parallelen Seitenebenen der Gegenstände an der Stelle des Auges wirklich von einander abstehen, der Diffusionswinkel des Fernrohrs für das Auge des Beobachters, und für diese Gegenstände, bey ihren bestehenden äußern Umständen.

Bezeichnet (β) den nächsten Abstand beider Gegenstände; (γ) ihren Abstand vom Auge, und (ψ) den Diffusionswinkel,

so ist $\psi = \frac{\beta}{\gamma}$.206264. Secunden.

Hätte das Fernrohr keine Längen-Abweichung und Farben-Zerstreuung, so transferirt es die wahren Bilder beider Gegenstände unmittelbar auf die Netzhaut selbst, ohne allen Diffusionsraum; es bestehet daher für ein solches Fernrohr kein Diffusionswinkel; und die Gegenstände scheinen dem Beobachter sich nur alsdann zu berühren, wenn sie ihres Orts einander so nahe sind, daß der optische Winkel der zwischen ihnen befindlichen Luftspalte kleiner ist, als daß das Auge den Eindruck ihres Lichts noch sollte empfinden können.

f. Je feiner nun überhaupt der dioptrische Winkel eines entfernten Gegenstandes B nach seinem Durchschnitt und Abstand, und je geringer die Helligkeit ist, in der er sich nach seiner Erleuchtung, Farbe und Verschleyerung durch die Luft auf seinen luftartigen Hintergrund und nach der Lichtstärke des Fernrohrs, sich präsentirt, und je größer dagegen der Diffusionswinkel des Fernrohrs ist, um so undeutlicher wird er in demselben gesehen; er verschwindet dem Auge ganz, wenn der Eindruck seines diffusen Bildes kleiner ist, als daß das Auge ihn noch empfinden kann: es ist unter solchen Umständen der Effect des Fernrohrs um so schlechter.

Der

Der Effect eines Fernrohrs bestimmt sich daher für seinen Beobachter, aus dem optischen Winkel, unter welchem ein feiner Gegenstand über seinem Hintergrund bey der günstigsten Erleuchtung in der hehren Atmosphäre beinahe verschwindet, in einem Abstand, wo die Verschleyerung durch die Luft noch nicht fühlbar ist; oder in welchem er den Gegenstand am deutlichsten siehet.

Es sey z. E. der feine Gegenstand eine schwarze Linie von der Breite (a.) auf weißem Hintergrund; und (d.) der Abstand, in welchem diese dem Beobachter in dem Fernrohr bey einer (m)maligen Vergrößerung desselben, bey hehrer Atmosphäre, kaum mehr sichtbar ist; und (φ) der optische Winkel jenes schwarzen Strichs im Auge; so ist einmal

$$d.\text{tang}\, m\varphi = a; \quad \text{und} \quad \varphi = \frac{a.206264}{d.m.}$$

So konnte z. E. Hr. Schröter in seinem Reflector von 7 Fußen, bey 100maliger Vergrößerung, eine Schrift von einer Linie in einem Abstand von 1500 Fußen sehr gut lesen; aber Puncte, die fünfmal kleiner waren, kaum mehr bemerken.

Für diesen Reflector ist ihm also sein beinahe verschwindender Sehewinkel für schwarz auf weiß

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{144} \cdot \frac{246264}{1500} = 24 \text{ Secunden.}$$

Dieser Winkel scheinet auch für sehr gute Achromaten der kleinste zu seyn, unter welchem einem guten kurzsichtigen Auge aufs deutlichste gesehene Objecte beinahe verschwinden; und es ist daher der optische Winkel selbst $\frac{24}{m}$. Secunden.

Wenn daher für das nemliche Auge, der kleinste dioptrische Sehewinkel eines Fernrohrs A; $\frac{20}{m}$, und für

ein anderes B, gerade $\frac{24}{n}$ Secunden ist; so verhalten sich die Effecte beider Fernröhre verkehrt, wie diese Quotienten, oder wie

$$\frac{1}{\frac{20}{m}} \cdot \frac{1}{\frac{24}{m}}; \text{ oder wie } \frac{m}{20} \cdot \frac{n}{24}.$$

Für gleiche Vergrößerungen würden sich daher auch die Effecte beider Fernröhre wie 6:5 verhalten.

g. Dieser kleinste dioptrische Sehewinkel nimmt aber mit der Undeutlichkeit zu, in welcher das Auge weit entfernte Gegenstände durch das Fernrohr siehet; weil mit dieser der Eindruck des Bildes im Ganzen sowohl, als in seinen Theilen auf das Auge geringer wird.

Stehet nemlich der Gegenstand in dem Abstand (nd) vom Auge, so ist einmal die Lichtmenge, welche jeder seiner Theile nach dem Fernrohr schicket, auch (n^2)mal kleiner; und die Luft debilitiret außerdem auf diese Weite das von ihm ausgehende Licht um so mehr, je weiter das Auge sich von ihm entfernet; oder sie verschleyert gleichsam den Gegenstand.

Siehet z. E. der Beobachter an einem Thurm noch die Ritzen seiner Mauer, so verschwinden ihm diese nach und nach, so wie er sich von ihm entfernt; es verschwindet ihm bey zunehmender Entfernung das Bley an den Fenstern, die Fensterrahmen, die Dachziegel, die Zahlen an dem Uhrblatt, ja dieses selbst; es verschwindet ihm der ganze Thurm selbst, in einem Abstand, in welchem sein Bild im Auge so klein und so lichtschwach ist, daß es im Auge den Eindruck des Empfindbaren nicht mehr herausbringen kann.

Je mehr daher der Geograph über den kleinsten dioptrischen Sehewinkel seines Fernrohrs, für Gegenstände

von

von gegebener Breite und Abstand Versuche anstellet, um so besser kann er in seinem Geschäftsgang sich derselben für verschiedene Ueberschläge bedienen, wie in der Folge vorkommen wird.

In einem Achromat von 18 Zollen siehet ein gutes kurzsichtiges Auge, bey 30maliger und noch etwas schwächerer Vergrößerung, einen frisch geschälten Baustamm von 16 Zollen, auf 16 Stunden bey heiterer Luft sehr gut; von der Sonne erleuchtet glänzte er wie ein Lichtstreifen.

Eben so gut zeiget sich ein schwarz angestrichener Signalstamm in einer Stärke von 18 Zollen; ein von der Luft grau angelaufener Baustamm zeiget sich unter ähnlichen Umständen in einer Stärke von 14 Zollen bis an sein schmales Ende von 10 Zollen in einem Abstand von 8 Stunden noch sehr gut.

Das Augenmaaß.

V. Das Augenmaaß des Geographen, in so weit es bey Winkelmessungen in Betracht kommt, bestehet zunächst in der durch Uebung erlangten Fertigkeit, kleine Intervalle einzutheilen, und zu schätzen, wo er z. E. auf seinem Geodoliten einen Theilstrich seines Nonii mit einem seines Limbi zusammen stellet, oder sonst beim Winkelmessen ein Object in die Mitte des Fadenkreuzes seines Fernrohrs zu bringen hat.

a. Dieß Augenmaaß erwirbt sich meines Erachtens der Geograph nach und nach, durch die Schätzung kleiner Intervallen, die er nachgehends aufs genaueste abmessen und so sein Schätzungsresultat mit der Messung controlliren, und sein Auge durch die sich vorfindende Unterschiede zu einem sichern Augenmaaß gewöhnen kann.

Um

Um z. E. mein Augenmaaß für feine Gegenstände, für schwarz auf weiß zu probiren, nahm ich zwey schwarze Pferdhaare, die mir auf weißem Papier ausgespannt, gleich dicke schienen; als ich aber dieselbe über einen Bleystift dichte aufwund, maßen von dem einen 200 Wunde gerade 130:1000, von dem andern aber 140:1000 eines Nürnberger Fußes.

Nun war die Dicke des einen Haars $\frac{1}{200}.\frac{130}{1000}$; des andern $\frac{1}{200}.\frac{140}{1000}$ oder 0,000070 und 0,000065.. jenes Fußes; und ihr Unterschied $\frac{1}{200}\frac{1}{000}$ Fuße.

Da ich nun nach meinem Augenmaaß beide Dräthe gleich dicke schätzte, so kann ich mich in der Vergleichung so feiner Dinge um $\frac{1}{112}$ des Ganzen verschätzen.

Wenn mir daher die schwarzen Theilstriche eines silbernen Limbi durch die Luppe eben so breit wie jene Haare mit blosem Auge scheinen, so werde ich einen neben dem andern noch für gleichbreit halten, wenn er auch wirklich um $\frac{1}{112}$ breiter oder schmäler als der andere ist.

Je mehr Versuche dieser Art der Geograph anstellet, um so besser kann er sein Augenmaaß für feine Gegenstände schärfen, und desselben sich vergewissern.

b. Um ferner mein Augenmaaß auch für breitere Intervalle z. E. für eine ganze und eine halbe Linie zu prüfen, bisectirte ich auf verschiedenen Limben von Scheiben-Instrumenten und Quadranten, die Intervallen ganzer und halber Grade, und schlug nachgehends einen beliebigen Bogen mit dem Cirkel um.

Als ich z. E. bey der günstigsten Erleuchtung, einen Grad, dessen Intervall gerade eine Linie, oder $\frac{1}{144}$ eines Nürnberger Fußes maß bisectirte, nahm ich $20\frac{1}{2}$ Gra-

Grade aufs genaueste mit einem scharfen Federcirkel ab; nachdem ich ferner diesen Bogen 6mal auf dem Theilriß umschlug, erhielt ich einen Bogen von 123°„9′. Ich hatte also den Grad um $1\frac{1}{2}$ Minuten nach dem Augenmaaß, oder um $\frac{1\frac{1}{2}}{60}$ oder um $\frac{1}{40}$ fehlerhaft bisectirt.

Als ich diese Operationen öfters wiederholte, fand ich durch ein Mittel aus sämmtlichen, daß ich mich bey der Bisection eines Intervalls von einer Linie um $\frac{1}{32}$ derselben verschätzen könne; ich kann eben so ein Intervall von einer halben Linie, nur bis auf $\frac{1}{24}$ derselben, und von $\frac{1}{4}$ Linie nur bis auf $\frac{1}{12}$ derselben sicher bisectiren.

Solche Versuche sind für den Geographen nothwendig, wenn er die Zuverläßigkeit angeben will, mit welcher er den Stand der Theilstriche des Limbi und des Nonii von einander beurtheilen, oder einen gemessenen Winkel ablesen kann; und insbesondere mit welcher Gewißheit er das Bild eines entfernten Gegenstandes, gerade in die Mitte des Faden-Kreuzes seines Fernrohrs bringen, oder einen Winkel visieren kann; wie ich in der Folge zeigen werde.

Stellet der Geograph diese Versuche bey verschiedenen Erleuchtungen an, so kann er auch für diese, die Zuverläßigkeit seiner Schätzungen nach dem Augenmaaß kennen lernen; und davon bey der Ausgleichung der Differenzen, die sich in der Summe der Winkel eines Dreyecks vorfinden, zweckmäßigen Gebrauch machen; wovon das Nähere in der Folge erläutert werden wird.

§. 4.

§. 4.

Betrachtungen über verschiedene, in den Geschäftskreis des Geographen einschlagende Dinge.

Vorläufige Bemerkungen über Länder-Charten.

I. Die geometrische Aufnahme eines Landes fundiret sich auf die Bestimmung der respectiven Lage, welche gegebenen Stellen des Conflicts seiner Horizontalprojection (§. 1. III.) unter sich haben; um hieraus in verjüngtem Maaße, ein Bild zu entwerfen, das jenem Conflict ganz ähnlich ist, und als solches die Charte des Landes genannt wird.

In dieser Absicht überziehet der Geograph wie der Geodät das aufzunehmende Land, mit einer, so weit es möglich ist, continuellen Dreyeckreihe, oder dem so genannten Triangularnetz; er projiciret dieses auf die Horizontalebene, auf den trocknen Sürfas des Landes (§. 1. e.); so daß die Spitzen dieser Dreyecke gleichsam die Knoten jenes Netzes abgeben; das sonach ganz in dem trocknen Sürfas des Landes selbst liegt.

Nach diesem Netz fertiget der Geograph wie der Geodät nach verjüngtem Maaße ein ähnliches auf dem Papier; das einer Sphäre anpasset, deren Halbmesser sich zu dem Halbmesser der congruenten Sphäre des Landes (§. 1. III.) eben so, wie das Ganze zu seinen Theilen sich proportioniert; und füllet dasselbe mit dem Detail des Landes in seiner Auszeichnung für seine Charte aus.

Diese Charte heißt die geographische Charte des Landes, wenn sie außer den bewohnten Orten und sonstigen Etablissements, noch die Richtung seiner Gebirge,

seiner Bergketten, seiner Ströme, Flüsse und Canäle, seine Seen, Wälder, Moore und die wichtigsten seiner technischen Anlagen; wie z. E. Brücken, Chauseen und Landstraßen anzeiget; sie heißet die topographische Charte des Landes, wenn sie außer diesen Dingen, die Gränzen jeder Gemeinflur, mit allem in derselben Merkwürdigen darstellet; es gehet diese in die Oeconomische über, wenn sie außer den Grundrissen der bewohnten und unbewohnten Gebäude und Etablissement, auch die einzelnen Grundstücke jeder Gemeinflur, mit den Zeichen ihrer Producte, zunächst mit allen und jeden Vicinalwegen, Gehsteigen, Bächen, u. s. w. darstellet. Eine solche Specialcharte heißt deswegen auch eine Topographisch-Oeconomische Charte des Landes; und jeder Theil derselben, in so weit er die Flur einer Gemeinde in sich faßt, heißt deswegen auch die Flur-Charte der Gemeinde: sie ist statt dessen eine Topographischmilitairische Charte des Staats, wenn sie alle und jede Fortificationsanlagen des Staates, die Fährten durch Flüsse, Hohlwegen, und ein Terrain bestreichende oder dominirende Berge, mit allem, was die Castramentation anbelangt, und dem Militair insbesondere interessiret, in sich verzeichnet hat.

Hebt man von der General-Charte des Staates solche Theile aus, deren jeder eine seiner Provinzen begreift, so werden solche Special-Charten, Provincial-Charten des Staates genannt; man nennt jene Charten, die Aemter-Charten der Provinz des Staates, wenn jede nur ein Amt der Provinz darstellet.

Verschiedene Arten ein Land aufzunehmen.

II. Dabey ist ferner die Methode, oder das Verfahren des Geographen, bey der geometrischen Aufnahme

oder

Bayerische Staatsbibliothek München

oder Abmessung der Horizontal-Projection eines Landes, §. 1. III., in nächster Beziehung mit seiner physicalischen Beschaffenheit; nach welcher es ein offenes, gebirgichtes, oder auch als ein mit Wäldern bedecktes Land ist.

a. Rücksichtlich dessen ist nun bey dem offenen Lande, das als solches nach allen Richtungen freie Aussicht gewähret, die Triangular-Methode zunächst anwendbar; nach welcher der Geograph ein sphärisches Dreyecknetz über das ganze Land verbreitet, und so durch dasselbe die respective Lage der Orte und Stellen des Landes findet. Es ist diese Methode noch um so brauchbarer, wo nach dem Terrain, auch eine oder mehrere gerade Linien oder Diagonalen durch das ganze Land abgesteckt werden können, an welche man die Dreyeckreihe anlehnen, oder auch diese durch jene verificiren kann.

b. Können nach dem Terrain des Landes mehrere solche Diagonalen in paralleler Richtung durch dasselbe gezogen, und diese durch andere Parallelen durchschnitten werden, so zerfället dadurch das Land selbst in mehrere Rhomben, deren jeder nachgehends für sich aufgenommen werden kann. Diese Aufnahms-Methode heißt deswegen auch die Parallel- oder auch Rhomboidal-Methode.

c. Ist statt dessen das aufzunehmende Land mit großen Waldungen hin und wieder bestockt, in welchen die bewohnten Orte, und andere merkwürdige Stellen von der Ferne nicht sichtbar sind, so wendet man die Triangular-Methode so weit an, als es angehet; und lässet insbesondere, die Dreyeckreihe rings um den Saum oder an die Brahme des Waldes anlaufen; und nimmt nachgehends die im Walde selbst liegenden Ortschaften und andere Stellen, polygonometrisch auf.

Eben so lässet man auch die Dreyeckreihe an die im Lande befindliche große Seen, unzugängliche Meere, und an den Fuß der Gebirge anlaufen.

Wo das Land ein Continens von Gebirgen ist, ziehet man die Dreyeckreihe über die Spitzen seiner Berge; und verbindet mit derselben die polygonometrische Aufnahme seiner Thäler.

d. Ist das Land hingegen ein Continens von Urwaldungen, in welcher seine bewohnte Orte sich befinden, so findet hier weder die triangulare noch rhomboidale Aufnahme statt, weil die Aussicht von einem Ort zum andern meistens durch die Bäume verdeckt ist.

Es bleibt daher in den meisten Fällen nichts anders übrig, als die Hauptstraßen, welche ein solches Land durchschneiden, mit den Vicinalstraßen, die von einem Orte zum andern führen, geodätisch aufzunehmen, und in die Charte einzutragen.

Ist das Land so groß, daß diese Aufnahme zu viele Zeit erfordern oder zu viele Kosten verursachen müßte, so begnüget man sich auch, an Orten, wo die Berge das Pendel oder den Niveau nicht afficiren können, §. 1. b., ihre geographische Breite astronomisch zu bestimmen; und ihre Längendifferenz durch Chronometer, oder auch, wo es angehet, durch Blickfeuer zu finden; man findet diese auch durch Sternbedeckungen, durch Mondsdistanzen, oder auch durch Sonnen- und Mondsfinsternisse, und am vorzüglichsten durch die sich öfters ereignenden Bedeckungen der Jupiters-Trabanten, je nachdem man für solche Bestimmungen sich Zeit nehmen kann.

Sind auf diese Art mehrere Orte eines solchen Landes in seine Charte eingetragen, so genüget es meistens, das Detail des zwischen ihnen befindlichen Terrains,

oder die Lage der Zwischenorte, die Richtung der Flüsse, Gebirge u. dgl. situationsmäßig aufzunehmen, und in die Charte einzutragen; die deswegen auch die Situations-Charte des Landes heißt.

Das Recognosciren eines Landes, zum Behuf seiner Aufnahme.

III. Es mag nun der Geograph die eine oder die andere dieser Aufnehmungs-Methoden (II.) nach der Beschaffenheit des durch ihn aufzunehmenden Landes wählen, so ist es ihm immer nothwendig, sich vorerst von demselben eine anschauliche Kenntniß dadurch zu erwerben, daß er dasselbe vorläufig bereiset, und an solchen Stellen, die vor andern eine weite Aussicht über das Land gewähren, dasselbe aufmerksam betrachtet, oder recognosciret.

Diese Stellen nun kennen zu lernen, ist ihm zuvörderst die Lectüre der Geographie des Staats, die Betrachtung der von ihm etwa vorhandenen Situations-Charten, und eine Bekanntschaft mit Personen nothwendig, welche das Land in seinem Detail genau kennen.

Erst nachdem der Geograph von den höchsten Puncten des Landes, auf welchen man die weiteste Aussicht hat, informirt ist, kann er sein Recognoscirungsgeschäfte beginnen, auf welches er in der Folge alle seine übrigen Arbeiten und Operationen gründet; weil dieses gleichsam der Zuschnitt für diese ist; und deswegen das Ganze um so schlechter ausfällt, je schlechter recognoscirt worden ist.

Dieß Geschäfte, als eines der wichtigsten aller seiner Arbeiten, muß daher immer nach festen Principien eingeleitet und ausgeführt werden; und diese sind meines Erachtens folgende:

a. Da in einer geometrischen Figur, welche sich wie das Netz des Landes aus der Anreihung sich stetig folgender Dreyecke ergiebt, die Folgen der bey der Aufnahme derselben unvermeidlichen Fehler, um so mehr anhäufen oder um so bedeutender werden können, je mehr Dreyecke mit einander verbunden werden — so bleibet es erstes Princip des Geographen, das aufzunehmende Land in die möglichst einfachste geometrische Form zu bringen, und deswegen seine Dreyecke, aus welchen sich das geometrische Netz des Landes constituirt, so groß als immer möglich ist zu machen; damit er um so weniger derselben anreihen darf.

b. Da ferner nach geometrischen Gründen, die Folgen der in der Aufnahme eines Dreyecks unvermeidlichen Fehler, um so bedeutender werden, je spitziger und stumpfer die Winkel sind, unter welchen die Seiten desselben in gegebener Länge mit einander congruiren; so muß der Geograph darauf antragen, beim Recognosciren Dreyecke zu erhalten, die so viel als immer möglich ist, gleichseitig sind. Winkel von 25 Graden und von 130 Graden können gar nicht mehr passiren; und es versiehet sich deswegen derselbe außer einem guten Achromat, auch mit einem kleinen Winkelmesser, der auf einem kleinen Statif aufgesetzt werden kann, um mit demselben die Winkel der projectirten Dreyecke nur beyläufig zu überschlagen, und sein Recognoscirungs-Brouillon fertigen können.

c. Weil Winkel, welche excentrisch gemessen werden, immer zunächst centrirt werden müssen, und diese Arbeit allezeit nur auf eine Annäherung führet, so bleibt es für den Geographen ferneres Princip, die Winkel der Dreyecke seiner Haupt-Triangelreihe immer concentrisch zu messen, und deswegen an den Stellen derselben

selben Signale zu errichten, welche die Visierpuncte jener Dreyecke abgeben, unter welchen er ihre sphärische Winkel concentrisch messen kann.

Je größer nun die Seiten dieser Dreyecke, oder der Dreyecke der ersten Classe sind, um so mehrere kleinere Dreyecke lassen sich in jedem derselben an jede seiner Seiten anschließen; oder um so mehr secondäre Dreyecke, oder Dreyecke von niedern Classen finden bey der Aufnahme des Landes statt.

Von diesen nimmt nun der Geograph selbst die Dreyecke der ersten und andern Classe gewöhnlich in Rechnung: er überläßt die der dritten und niedern Classen den Geometern, die mit der Detail-Vermessung des Landes beauftragt sind.

d. In Befolgung dieser Grundsätze kommt demnach dem Geographen alles zuvörderst darauf an, die größten Abstände kennen zu lernen, in welche er seine Signale setzen kann, damit die Seiten seiner Primär- oder Hauptdreyecke in ihrer Art so groß werden, daß er sie mit seinem Fernrohr noch genüglich erkennen, und die Folgen der bey der Aufnahme solcher Dreyecke unvermeidlichen Fehler, nach der Güte seines Winkelmessers, nicht zu bedeutend werden.

Nun bestehen aber diese Signale meistens aus Parallelopipeden und Pyramiden, welche von Holz errichtet werden, und um so mehr dem Sturm ausgesetzt sind, je größer ihre Stoßfläche ist.

Da nun an der Festigkeit der Signale dem Geographen alles liegt, so pflegt man dieselbe nicht gerne über 20 bis 25 Fuße hoch zu machen: und es giebt deswegen diese Höhe und Breite der Signale den einen Anhaltpunct für die Bestimmung ihrer größten Abstände ab.

Außerdem aber hat noch die Dichte der Luft, nach dem Abstand des Landes und seiner Berge von dem See-

hori-

horizont, seine physicalische Beschaffenheit rücksichtlich seiner großen Waldungen, Seen, Mooren, deren Ausdünstung die Durchsichtigkeit der Luft schwächen; ferner die Gesichtsschärfe des Geographen, die Präsentation des Fernrohrs seines Winkelmessers, und die Zuverläßigkeit, mit welcher er mit demselben einen Winkel in den andern aufnehmen kann, auf die Bestimmung der Abstände der Signale, den nächsten Einfluß!

Er kann nach diesen Dingen seine Signale nicht weiter von einander setzen, als er ihr Bild in seinem Fernrohr noch in so weit erkennet, daß er dasselbe mitten zwischen die Fäden desselben hineinbringen kann; er kann außerdem dieselbe nicht weiter von einander setzen, als daß die Folgen der Fehler, die er in der Winkelmessung nicht vermeiden kann, für die Seiten der Dreyecke bedeutend werden müssen.

Rücksichtlich alles dessen, hat daher der Geograph bey dem Recognosciren zuvörderst sich zu überzeugen, wie weit beiläufig im Freien stehende Thürme, Bäume u. dgl. von ihm abstehen dürfen, wenn er sie in seinem Achromat noch auffinden und gehörig unterscheiden kann; er muß außerdem den Effect seines Achromats mit jenem seines Fernrohrs auf dem Winkelmesser bereits geprüfet, §. 1. IV., und vorläufig erprobet haben, auf wie viel Secunden er bey der Aufnahme eines Winkels in den andern, nicht mehr stehen kann.

Gesetzt, der Geograph sehe bey gewöhnlich heiterer Luft, die Kuppeln oder Dächer von Thürmen, in einem Abstand von 18 bis 20 Stunden, in seinem Fernrohr noch in so weit deutlich, daß er ihr Bild nach seinem Augenmaaß, mitten zwischen die Fäden desselben stellen kann, so ist er auch überzeugt, daß er ein Signal von 16

bis

bis 20 Fußen Höhe, auch auf 16 Stunden oder 256000 Fuße ganz gewiß genüglich erkennen kann.

Weiß er außerdem, daß er mit seinem Winkelmesser einen Winkel bis auf 3 Secunden sicher aufnehmen kann, so hat dieses in einem gleichseitigen Dreyeck von 16 Stunden, eine Folge von $\frac{8}{7} . 256000 . 0{,}0000145 = 4{,}2$ Fuße, oder $\frac{1}{60000}$ des Ganzen beinahe.

Da nun dieser Unterschied auf eine so große Weite nur unbedeutend ist; so kann der Geograph die längste Seiten seiner Haupt-Triangelreihe vorläufig auf 16 Stunden anschlagen, bis er sich in der Folge durch die Erfahrung an ein und andern bereits erbauten Signal selbst von der Entfernung überzeugt, in welcher ihm ein solches Signal so undeutlich in dem Fernrohr erscheinet, daß es dem Verschwinden nahe ist.

Wo der Geograph statt des Geodoliten nur mit dem Spiegelsextanten operiren kann, muß er an und für sich auf so große Dreyecke verzichten; er kann die größten höchstens zu etlichen Stunden nehmen, und sein Dreyecknetz wird um so componirter und unzuverläßiger.

e. Nach diesem Princip bereiset nun der Geograph die höchsten Puncte des aufzunehmenden Landes, und lässet auf denselben da oder dort Signale errichten, wo die Berge und Landhöhen, welche eine weite Aussicht gewähren, unter sich eine Lage haben, wornach sie ein vortheilhaftes Dreyeck bilden.

Außerdem nun, daß er sich von der höchsten Stelle mit einem Generalpaß versiehet, in welchem er allen Behörden des Staates für die beste Aufnahme und Unterstützung empfohlen wird, erbittet er sich bey seiner Ankunft in der Gegend, wo er recognosciren will, von dem Amte, oder auch nur von dem Ortsvorstand, Leute aus, welche der Gegend in so weit kundig sind, daß sie ihm

die

die auf dem Berge sichtbaren Gegenstände grösstentheils nennen können; er nimmt außerdem den Landgeometer des Districts mit sich, welcher nach seinen Angaben die Errichtung des Signals, durch die Zimmerleute besorgt, wo eines dergleichen erbauet werden soll, damit er selbst sich nicht zu lange an Ort und Stelle aufhalten darf.

Wo Thürme oder sonstige Gebäude eine Lage haben, wornach auf ihnen Winkel genommen werden müssen, lässet der Geograph in die Dächer derselben Lücken einschneiden; wo die Schallöcher und Fenster derselben seinem Zweck nicht genügen.

Wo der Geograph auf einem Berg recognosciren wollte, der ganz mit Bäumen bewachsen ist, lässet er einen der höchsten auf der Kuppe durch einen der Gegend kundigen Mann besteigen, und sich die Namen der Orte, Berge, und sonstigen eminenten Dinge, die man allda sehen kann, zurufen; er überzeuget sich dessen selbst, wenn er für das Baumsteigen die nöthige Fertigkeit hat.

Ueberzeuget sich nach diesem der Geograph, daß eine solche Stelle für sein Dreyecknetz äußerst vortheilhaft gelegen, oder sonst für ihn unumgänglich nothwendig seye, so lässet er allda ein Signal mit Etagen errichten, auf welchem er die Winkel ringsherum frey abnehmen kann.

f. Wo große unübersehbare Waldungen in dem Lande sind, lässet der Geograph an ihrem Umfang an solchen Stellen Signale errichten, von welchen aus die Aussicht nach einigen Hauptstellen oder Standpuncten der ersten Ordnung frey ist, oder auch, wo Landstraßen in den Wald eintretten; um durch solche Signale die Dreyeckreihe an den Wald anzuschließen (III. c.).

g. Insbesondere aber berücksichtiget der Geograph bey diesem Geschäfte auch die ausgedehnten Ebenen im Staate, aus welchen sich füglich eine Grundlinie, oder auch eine oder die andere Verificationslinie messen ließe; welche letztere er vorzüglich an den Gränzen des Staates auswählet. Er mißt eine dieser Linien vorläufig mit der Kette in Zeiten, wo dieß wegen der Feldfrüchte angehet, verbindet dieselbe mit seiner Dreyeckreihe, um sein Broillon darauf gründen zu können.

Außer solchen Plätzen notiret der Geograph auch solche Orte, an welchen sich am füglichsten astronomische Beobachtungen anstellen lassen.

h. Rücksichtlich dieser ziehet der Geograph solche Plätze vor, an welchen ihr fester Boden seinen Instrumenten einen festen Stand gewähret, die außerdem eine freie Aussicht haben, und wo insbesondere das Pendel nicht von benachbarten Bergen afficirt werden kann.

Neben diesem allem führet der Geograph noch ein Reisebarometer bey dem Recognosciren mit sich, nach welchem er die Barometerhöhe an jedem ausgewählten Standort sowohl, als auch hin und wieder an andern Orten, z. E. Städten und sonstigen Plätzen, notiret; um nach demselben, und nach Beobachtungen, die gegebenen Orts, z. E. in der Hauptstadt durch einen Meteorologen, täglich in bestimmten Stunden angestellet werden, vorläufig das barometrische Nivellement des aufzunehmenden Landes kennen zu lernen.

i. Vorzüglich aber träget es der Geograph bey dem Recognosciren darauf an, solche Stellen zu bemerken, an welchen ihm mehrere Gegenstände, oder auch ein Paar Signale in gerader Linie sich zeigen; weil solche Stellen, wenn sie wirklich in die Charte aufgenommen werden, dieselbe revidiren helfen; und merket diese

Stel-

Stellen in seinem Reisemanuale vor. Er bemühet sich außerdem, wo sich nach dem Terrain Gelegenheit zeiget, eine solche Linie zu verlängern, diese Verlängerung zu bewerkstelligen, um, wo möglich, dieselbe durch das ganze Land zu ziehen, und sich nachgehends derselben als einer Diagonale bedienen zu können (III. a.).

Die Signale bey geographischen Messungen.

IV. Hat die Natur, oder auch die Kunst, an solchen Plätzen keine eminente Gegenstände placirt, welche vor andern zum Behuf der geographischen Messung dienlich, oder unumgänglich nothwendig sind, so werden an solchen Stellen nach Umständen künstliche Signale etablirt!

Es errichtet deswegen dieselbe der erste Trigonometer oder Geograph, welcher als solcher die Reihe der Hauptdreyecke zu construiren hat; es errichten die ihm nachfolgenden Geometer, welche die Secundär-Dreyecke formiren, für ihren Bedarf Signale; und wenn die geographische Messung bis in die geodätische Detail- oder Flurvermessung §. 1. I. sich extendiret, so setzen auch die Geodäten Signale zum Behuf ihrer Arbeiten.

Nach diesen verschiedenen Zwecken sind daher auch die Signale, in soweit sie bey solchen Operationen Anwendung finden, nach ihrer Construction sehr verschieden; es sind auf jeden Fall die Signale des Geographen in ihrer Art die componirtesten; und dabey in derselben gewöhnliche oder statt dessen außergewöhnliche oder von extraordinairer Bauart.

Unter dieser sind nun einmal Signale der ersten Classe des Geographen nach ihrer Form, drey- oder vierseitige Pyramiden, oder auch Parallelopipe-

don. Sie werden aus vierkantig zugehauenen in den Boden eingerammten, und in einer Spitze zusammen verbundenen Bäumen errichtet, über deren Aussenseite Bretter oder auch Segeltuch oder Linnen bis auf eine gewisse Tiefe herunter aufgenagelt werden. In der Lothlinie des Scheitels der Pyramide wird ferner in den Boden ein Strunk von mehrern Klötzern eingerammet, oder statt dessen ein Piedestal von Steinen errichtet, auf welchem nachgehends der Winkelmesser bey der Winkelaufnahme in der Station der Pyramide zu stehen kommt; und übrigens das Ganze, nicht sowohl wegen des Verwitterns, als anderer Umstände wegen, mit der Oelfarbe angestrichen.

a. Bey solchen Signalen kommt nun zunächst alles darauf an, daß sie nicht schief, sondern nach allen Seiten lothrecht stehen; daß sie außerdem dem Winde gehörig widerstehen, oder durch den Sturm nicht zur Seite gedrückt werden können; und daß sie dabey eine Höhe haben, wornach sie auch von andern Signalen aus, noch genüglich in dem Fernrohr bemerkt, und zwischen dessen Fäden gebracht werden können.

Diese Höhe richtet sich bey einerley Form der Signale, zunächst nach der Weite, auf welcher sie gesehen werden sollen; und ergiebt sich für außerordentliche Fälle folgendermaßen, aus der Höhe der gewöhnlichen.

Es könne z. E. der Geograph auf einem Standpunct einen Berg noch sehen, der wenigstens 30 Stunden von ihm abliegt, und findet denselben für die Erbauung eines Signals dienlich.

Nun weiß er aus der Erfahrung, daß er ein Signal von 18 Fußen, das unten 6 Fuße offen ist, auf 16 Stunden in seinem Fernrohr noch sehr gut sehen kann, welches ihm dasselbe (m)mal vergrößert. Für dieses ist

also die Stunde zu 16000 Fuß gerechnet sein scheinbarer Halbmesser $= \frac{1}{16}\frac{9-6}{16000} = \frac{1}{16}\frac{3}{16000}$. Theile des Halbmessers.

Setzt man nun die Höhe des Signals in 30 Stunden $= x$, in so weit es bedeckt wird, so ist

$$\frac{1}{16}\frac{2}{16000} = \frac{1}{30}\frac{}{16000} \text{ oder } x = 22\tfrac{1}{2} \text{ Fuß};$$

mithin wird die Höhe des ganzen Signals bey 30 Fuße seyn müssen, wenn es fast eben so gut wie das 18fußige auf 16 Stunden gesehen werden solle, bey sonst übrigen gleichen Umständen.

Außerdem eignet sich auch die Ausladung, welche man dem Signal, für seine Sicherung gegen den Sturm giebt, nach der Heftigkeit der Stürme, und nach dem örtlichen Klima seines Orts.

Man giebt gewöhnlich der Seite der viereckichten Pyramide $\frac{1}{3}$ ihrer Höhe; macht aber ihre Ausladung noch größer, wenn sie dem Sturm außerordentlich exponirt ist; und trägt darauf an, ihre Wandsäulen in den Boden so tief einzurammen, und zu verkeilen, daß der Sturm sie von seiner Seite nicht heben, und von der andern niederdrücken kann.

Da ferner auch die Bretter, mit welchen die Wandsäulen der Pyramide von außen, bis auf 6 Fuße herunter beschlagen werden, mit der Zeit abblassen, und grau werden, so werden solche Signale auch mit der Oelfarbe von außen angestrichen, welche noch außerdem ihre Verwitterung und Fäulniß hindert. Es ist dabey die Farbe, welche man dem Signal giebt, keineswegs gleichgültig, sondern richtet sich nach dem Hintergrund, welchen das Signal seines Orts hat.

Giebt nemlich der Himmel selbst den Hintergrund ab, so wird das Signal auf dieser Seite schwarz angestrichen, weil diese Farbe auf dem weißen Himmel am

beß-

beßten abstich; man streichet es weiß an, wo ein Wald, und roth, wo ein Gebirg seinen Hintergrund abgiebt.

Dabey beurtheilet ferner der Geograph die Möglichkeit eines Hintergrundes für sein Signal, aus seiner Elevation oder Digression gegen die übrigen, von welchen aus dasselbe gesehen wird; liegen diese tiefer, so macht der Himmel selbst den Hintergrund; liegt aber das Signal niedriger als jene, so kann es einen irdischen Hintergrund erhalten, der sich aus der Lage, der in der Ferne umliegenden Wälder und Gebirge abnehmen läßt.

Uebrigens ist es für die Beobachtung der Winkel solcher Signale sehr dienlich, wenn der Geograph, die eine Seite solcher Signale, oder auch ihre Diagonale, in die Mittagslinie ihres Orts setzen läßt.

b. Statt dessen haben die außergewöhnlichen Signale, bey der pyramidalen Form eine Höhe, in welcher man die zunächst um sie stehenden Gegenstände sämmtlich übersehen kann; sie sind wegen ihrer kostspieligen Construction weit seltener als die gewöhnlichen, und werden vorzüglich nur auf Bergspitzen errichtet, welche mit Bäumen bewachsen sind. IV. e.

Bey solchen Signalen vertritt daher der allda befindliche höchste Baum die Stelle der Steigleiter, weil in ihm die Sprossen zum Aufsteigen unmittelbar eingebohret werden, in soferne man nicht eine eigene senkrechte Leiter in ihnen errichtet; sie erhalten so drey und mehrere Boden oder Etagen, auf deren obersten, mit einem Geländer umgebenen, in der Mitte der Winkelmesser aufgestellt wird; und sind dabey in jeder Etage zum Theil mit Brettern beschlagen, deren Farbe sich nach dem Hintergrund eignet.

Uebrigens beobachtet man bey solchen Signalen gerne die Vorsicht, daß man die Leiter, welche zur ersten

Eta-

Etage führet, nicht wie die übrigen feste macht: es verwahret sie gewöhnlich der Werkmeister, welcher das Signal erbauet hat, bis zur Ankunft des Geographen; damit das Signal nicht mancherley Unfug indessen ausgesetzt ist.

Auch stehen sämmtliche errichtete Signale unter Aspect der Policey des einschlagenden Amtes, welches sie gegen muthwillige Beschädigung, und Destruction zu sichern hat; und hiezu in dem Generalbefehl der Regierung, welchen der Geograph im Amte präsentiret, beauftraget wird. Aehnliche Signale werden öfters auch auf Gebäuden, die sehr hoch liegen, errichtet.

In Hochgebirgen, deren kahle Felsen öfters nur mit äußerster Lebensgefahr erklimmet werden müssen, können keine Signale von Holz errichtet werden. Man begnüget sich bey solchen statt des Signals nur mit einem Accumulat von Steinen, die man über einander schichtet, um dadurch den Felsen von andern unterscheiden, und seinen Visierpunct finden zu können.

c. Einfacher sind dagegen gewöhnlich die Signale, welche die Geometer für die Secundär-Dreyecke errichten lassen, oder die Signale der andern Ordnung! Diese bestehen gewöhnlich aus einem gehörigen Orts senkrecht in den Boden mit Keilen befestigten, mit Seitenstreben versehenen Baustamm, an dessen obern Ende sind zwey ungefähr 3 bis 4 Fuß von einander abstehende, mit Latten verbundene Scheiben fest, zwischen welche Strohgarben eingebunden werden; während auf der obern Scheibe ein conoidales Dach feste ist, welches über die Scheibe hervorraget.

Diese Signale haben gewöhnlich eine Höhe von 20 bis 30 Fußen; und man ergänzet von Zeit zu Zeit das Stroh innerhalb der Scheiben und ihres Gatterwerks, wenn es durch die Verwitterung grau geworden ist; wo-

bey

bey man darauf anträgt, wegen der Stürme das Stroh so dichte als möglich ist, zwischen diese Art von Trommel oder Korb einzupressen, und mit einem Gatterwerk zu verflechten.

Oefters wird auch der Nadelbaum mit seinem obern Zopfende als Signalstamm gebraucht. Da aber das Zopfende durch die Vertrocknung seiner Nadeln in der Ferne mit der Zeit undeutlich gesehen wird, so pflegt man auch dasselbe mit Stroh einzuflechten.

Außer diesen Signalen setzen die Geometer nach Umständen andere geringere an Stellen aus, welche sie zu gewissen Absichten bestimmt haben; um z. E. von denselben eine Detailmessung in Thälern oder Waldungen u.dgl. vornehmen zu können. Sie bedienen sich solcher Puncte, als Anhalt-Puncte, um an denselben solche specielle Messungen, welche nicht mehr triangulär vollführt werden können, gleichsam anzubinden: sie stecken solche Signale außerdem auf den Fluren für die Geodäten aus, um diesen fixe oder bestimmte Puncte auf denselben zu verschaffen, auf welche diese nachgehends ihre geodätische Operationen gründen; in soferne die geographische Messung bis zur Detailmessung ausgedehnt werden sollte.

Solche Signale bestehen nun in senkrecht aufgerichteten Stangen, an deren obern Ende ein Strohbund oder Schaub feste gemacht ist; und es stehen diese Signale, so wie alle übrige, unter Aspect des einschlagenden Amtes.

Wo die geographische Vermessung sich mit der Detail-Messung der Fluren endet, stellen auch die Geodäten ihre Signale, oder Piquete, an Stellen auf, welche sie als Durchschnitts-Puncte des geodätischen Netzes der Fluren, oder auch als besondere Stations-Puncte, oder sonst als Hauptbünde vor andern distinquiren oder unterscheiden wollen. Diese sind den Signalen der Geometer ähnlich,

lich, und müssen ihres Orts so lange erhalten werden, bis die Geodäten ihre Operationen auf der Flur beendet haben, für welche sie errichtet sind.

d. Operiret der Geograph auf einem Berge oder überhaupt auf einem Terrain, auf welchem er eine außerordentlich weite Aussicht über das aufzunehmende Land hat, so kann er sich über dasselbe Durchschnitte oder Durchschläge aufnehmen, die, wenn sie auch nicht mit andern so verbunden werden können, daß ein ungewöhnlich großes Dreyeck daraus construirt werden könnte, doch den Nutzen haben, daß er in der Folge seine Operationen, durch solche Winkel erproben oder verificiren kann.

Würden nun die so weit entlegene Berge, Signale von außerordentlicher Höhe erfordern (I. a.), wenn sie bey Tage noch gehörig gesehen werden sollten, so dedienet sich statt deren der Geograph auf denselben schicklicher der Nacht-Signale.

Solcher Signale bedienet er sich auch, wenn er nach den Bergspitzen weit entlegener Gebirge zu visieren hat, die selten bey Tage, wegen Einhüllung in Wolken, sichtbar sind; er bedienet sich derselben auch zur Absteckung sehr langer Revisionslinien.

Diese Nachtsignale bestehen nun gewöhnlich aus den sogenannten Wachtfeuern, welche abgeredter maßen zwischen dem Geographen und dem dortigen Wächter, angezündet und zu Nachts unterhalten werden; es ist dabey eine Flamme von 3 Fußen auf 12 Stunden Entfernung im Fernrohr sichtbar.

Da aber solche Feuer insbesondere durch den Wind getrieben, ihre verticale Richtung öfters ändern, und außerdem immer in zitternder Bewegung sich zeigen, so sind die nach ihnen genommenen Winkel, immer etwas unsicherer, als Winkel, welche bey Tag genommen werden können.

Siche-

Sicherer sind daher die so genannten Reverberen, mit paraboliſchen Spiegeln, wie ſie gewöhnlich auf Leuchtthürmen zur See gebraucht werden, aber auch um ſo koſtbarer in der Anſchaffung und Unterhaltung; ſie zeigen ſich in einer ſternenhellen Nacht auf 16 bis 18 Stunden.

Hieher gehören auch die Blickfeuer, durch Pulverexploſionen, welche vorzüglich für die Beſtimmung der geographiſchen Längen-Differenzen gebraucht werden.

Allgemeine Betrachtungen über Winkelmeſſer.

V. Der Geograph beſchäftiget ſich auf jedem ſeiner ausgewählten Standpuncte zunächſt mit der Winkelaufnahme vermittelſt ſeines Winkelmeſſers, das iſt: er mißt die Neigung, welche jene gerade Linien unter ſich haben, in welchen Verticalebenen, die er ſich durch die Mitte ſeines Standpuncts, nach den von ihr aus ſichtbaren entfernten Gegenſtänden denkt, die ſcheinbare Horizontal-Ebene des Standpunctes ſchneiden. Es iſt daher erſtes Requiſit, daß ſich die Ebene ſeines Winkelmeſſers, oder ſein Limbus, ganz in jener Horizontalebene befindet, oder daß er horizontal ſtehet; in ſoferne der Winkelmeſſer nicht ſo beſchaffen iſt, daß ſeine Ebene in jene Ebene gebracht werden muß, welche durch die Mitte deſſelben und durch die Gegenſtände ſelbſt gedacht wird, deren Winkel der Geograph meſſen will; er muß den ſchief gemeſſenen Winkel nachgehends auf den horizontalen reduciren.

Rückſichtlich dieſer Conſtruction zerfallen nun die Winkelmeſſer in ſolche, mit welchen bloß horizontale, oder ſtatt deſſen, auch ſchiefe Winkel gemeſſen werden; ſie ſind nothwendig ganze Vollkreiſe, und heißen insbeſondere Geodolithen.

Was nun unter diesen zuvörderst jene Geodolithen anbelangt, mit welchen Horizontalwinkel unmittelbar gemessen werden, so ist der Vollkreis ABNo Fig. 47. Tab. IV. derselben, oder ihr Limbus, in seine 360 Grade, oder statt dessen auch nach der neuern Decimal-Eintheilung in 400 Decimal-Grade abgetheilt, deren jeder abermal in eine gewisse Anzahl gleicher Theile, z. E. in 10 oder 12 Theile abgetheilt ist, so daß ein solcher Geodolith in Winkel von 5 bis 6 Minuten unmittelbar eingetheilt ist.

Ueber diesem Limbus, oder auch in demselben, ist ferner die Alhidade, oder eine Scheibe beweglich, oder auch in ihn eingedrehet, die sich in seinem Centro C concentrisch mit dem Theilriß seines Limbi sanft beweget, und bey p„q„r„s einen Nonius hat, deren jeder die Theile des Limbi noch weiter abtheilet.

Diese Abtheilung gehet bey den Reichenbachischen Geodolithen bis auf 5 Secunden, bey einem Halbmesser von 8 Zollen.

Auf der Alhidade ist ferner in der Richtung pq eine Libelle, und auf diese senkrecht in der Richtung DE, zwey Supports DG und FE feste, in welchen eine Axe FG sich drehet, an welcher das Fernrohr HI mit seinen Höhenkreis mn feste ist, der durch einen bey C angebrachten Nonius die Höhen- und Tiefenwinkel mißt.

An der Axe sind ferner zwey Schlenker hi„kl angehängt, welche eine gläserne Wasserwaage oder Niveau li tragen, durch welche die verticale Bewegung des Fernrohrs auf die Ebene des Limbi hergestellt wird.

Das Fernrohr ist übrigens an sich achromatisch, und hat in dem Brennpunct seines Oculars ein Fadenkreuz von Spinnefäden, dessen Fäden sich unter einen Winkel von 45 Graden durchkreuzen.

Ein ähnliches Fernrohr befindet sich auch unter dem Limbus in der Richtung ON seiner Fiduciale: es ist wie

das

das Obere seines Orts in einer Axe auf- und niederbeweglich, und kann durch eine gewisse Vorrichtung mit seiner Seheaxe in eine auf die Fiduciallinie senkrechte Ebene gerückt und festgestellt werden.

Dieß Ganze ruhet nun auf einem Statif von der Form eines gleichseitigen Dreyecks, das durch die durch die Spitze desselben gehende Schrauben auf- und nieder gehoben werden kann, während die Spitzen dieser Schrauben auf eine feste Unterlage, z. E. auf einen Stein drükken, der das Ganze trägt.

Dabey lässet sich der Limbus auf seinem Statif aus dem Rauhen wenden, und durch eine feine Schraube, auch um einen kleinen Winkel verrücken und feste stellen; es hat die Alhidade eben so auch eine ähnliche sanfte Bewegung.

Nach Umständen kann der Geodolith auch mit einem eisernen dreybeinichten Statif verbunden werden, dessen Füße nach Erforderniß enger oder weiter gestellt werden können.

Es ist dabey außer der Ebene des Limbi, der Richtigkeit und Concentricität der Eintheilung eine der wesentlichsten Eigenschaften eines Geodoliten, daß sein oberes Fernrohr in seiner Kippe senkrecht auf die Ebene des Limbi sich beweget, und die Seheaxe seines untern Fernrohrs aufs genaueste in der Verticalebene durch die Axe des obern sich befinde; daß in beiden Fernröhren die Fadenkreuze in der möglichsten Feinheit eine Stellung haben, wornach ihr Durchschnitt nicht nur in die Sehe-Axe jedes Fernrohrs selbst fällt, sondern die Fäden selbst eine Stellung haben, in welcher eine Verticale ihren Flächenraum genau bisectiret. — Daß außerdem der Limbus durch seine Libellen genau in horizontale Lage gebracht werde; — daß insbesondere die Libelle des obern Fernrohrs mit dessen Seheaxe parallel, und diese rechtwinklicht

licht auf die lothrechte seye, welche den Nullpunct seines an ihm angebrachten Höhenmessers anschneidet; — daß übrigens seine beide Fernröhre achromatisch seyen, und die Gegenstände möglichst deutlich und helle präsentiren; — daß ihre Oculare sich nur in bestimmter Richtung ziehen lassen, wobey sich die Seheaxe nicht ändert; — daß im Ganzen das Instrument in seinem Fußgestelle die gehörige Festigkeit und seine sämmtlichen Schrauben für sanfte Bewegungen auch die gehörige Sattigkeit haben; — daß endlich das Ganze seines Orts auf seiner festen unveränderlichen Unterlage feste und unbeweglich stehe, und hiezu durch sein eigenes Gewicht für den festen Stand beitrage.

Spiegelsextanten, wenn sie auch einen Halbmesser von 10 und mehrern Zollen haben, sind niemals für die Winkelaufnahme großer Primär-Dreyecke, die als solche sich beinahe auf einen Breitengrad erstrecken, §. 4. III. a., brauchbar; weil diese Instrumente an und für sich in dem Parallelismus ihrer Spiegel durch den Transport sehr leiden; und außerdem die Deutlichkeit des Sehens, insbesondere des reflectirten Bildes, mit der Entfernung der Gegenstände stark abnimmt.

Solcher Instrumente mögen sich bey der geographischen Aufnahme eines großen Staates, die Geometer für die Aufnahme ihrer Secondär-Dreyecke bedienen, die als solche sich höchstens auf etliche Stunden erstrecken; sie gewähren den Vortheil, daß sie auch für den Schlizzen der Thürme, zum Winkelmessen besser als jeder andere Winkelmesser geeignet sind; weil sie sich in dieselbe hinein rücken lassen, und daß man sich außerdem mit demselben auf jedem Baum aufstellen kann, wenn man die Winkel frey misset.

Aufnahme terrestrischer Winkel.

VI. Die Standpuncte des Geographen sind primäre und secondaire: er wählet insbesondere erstere in der Lothlinie der Signale der ersten Classe (IV.), die er beim Recognosciren für die Dreyecke der ersten Ordnung hatte errichten lassen (III.); deren Winkel-Aufnahme durchaus in den Scheiteln ihrer Winkel selbst bewerkstelliget werden muß.

Ist nun der Geograph an einem heitern Tage, welcher deswegen die weiteste Aussicht verspricht, mit seinem Apparat auf einer solchen Station angekommen, so untersuchet er zuvörderst den festen Stand, des unter einem solchen Signal für seinen Geodolithen errichteten Fußgestells; ob dasselbe instructionsmäßig aufgeführt wurde, oder sonst bis zu seiner Ankunft nicht alterirt worden seyn mochte; und ob seine Mitte auch in der Lothlinie der Pyramide sich befinde?

Findet sich nun alles wie es seyn sollte, so setzet der Geograph seinen Geodolithen auf jenes Piedestal, so daß sein Centrum in die Lothlinie der Pyramide trift, stellet ihn durch seine Libellen aufs genaueste horizontal, wischet von seinem Limbus und den übrigen Theilen den Staub mit einem feinen Pinsel ab, und sorget, denselben vor der directen Erleuchtung der Sonne ein für allemal durch einen Sonnenschirm zu sichern, der wo es erforderlich ist, durch eine Stahlschraube in die Bretter der Pyramide eingeschraubt, oder auch von einem Gehülfen schicklich gehalten wird.

Bis nun der Geodolith die Temperatur der Atmosphäre angenommen hat, recognosciret der Geograph mit seinem Achromat jene Seite des Horizonts, welche zur Zeit von der Sonne am beßten erleuchtet wird; er attendiret insbesondere auf solche waldichte Gegenden, wo

die

die Thürme durch die Waldbäume versteckt werden, um ein und andern zwischen denselben hindurchblickend zu entdecken, und notirt sich vorläufig die Namen der Ortschaften, wie sie ihm von den aufgebotenen Führern angesagt werden.

Nach beendigter Recognoscirung dieser Seite stellet der Geograph ferner den Index seines Nonii, der ihm gerade zu Gesichte ist, aufs genaueste über den Null- oder Anfangspunct der Eintheilung des Limbi; indem er beide Striche durch die Luppe neben oder über einander siehet, und die allda angebrachte Blendung, oder statt dieser einen Streifen weißes Papier in eine Lage bringt, wobey die Erleuchtung dieser Stelle des Limbi, die dem Auge convenabelste wird, und richtet das Instrument beiläufig nach einem Gegenstande A, von welchem aus er als dem Anfangspunct die Winkelmessung beginnen will.

a. In dieser Richtung stellet er ferner den Limbus seines Instruments durch seine Stellschrauben nach seinen Libellen aufs genaueste horizontal; siehet nach, ob der Index des Nonii noch genau über dem Zero der Eintheilung stehet, und bringt nun das Ganze durch die sanfte Bewegung in eine Richtung, in welcher das Bild des Gegenstandes A ihm aufs genaueste in der Mitte zwischen dem Fadenkreuz des obern Fernrohres zu seyn scheinet; und arretiret nun das Instrument durch seine Stellschraube, ohne dasselbe im mindesten verrückt zu haben.

Nun siehet der Geograph auch in dem untern oder Versicherungs-Fernrohr nach, ob das Bild des Gegenstandes A sich gleichzeitig auch in der Mitte seines Fadenkreuzes befindet; er ist seines Parallelismi überzeugt, wenn dieses aufs genaueste zutrift, statt dessen der-

derselbe erst durch jene feine Schraube hergestellt werden muß, durch welche das Versicherungsrohr unter dem Limbus um einen kleinen Winkel verschoben werden kann.

Will nun der Geograph an einer Station C den Winkel ACB zwischen zwey entfernten Gegenständen A „B messen, so verschiebet er nun bey unverrücktem Instrument, die Alhidaden-Regel oder Scheibe desselben so lange, bis sich ihm der Gegenstand B beiläufig in der Mitte des Fadenkreuzes, des auf ihr festen Fernrohres zeiget, und hilft mit der sanften Bewegung der Alhidade so lange nach, bis sein Bild mitten zwischen jenen Fäden ihm zu seyn scheinet; während er gleichzeitig auch in dem untern Fernrohr das Bild des A in der Mitte seiner Fäden siehet.

Hat sich nun der Geograph hiedurch von dem unverrückten Stande seines Geodolithen überzeugt, so liest er zunächst den gemessenen Winkel ACB auf der ihm zu Gesicht stehenden Seite des Limbi ab; er liest ihn eben so auch nach jedem der übrigen drey Nonien ab; und notiret die vier für den Winkel erhaltenen Resultate in sein Manuale; oder er dictiret auch dieselbe seinem Gehülfen, der ihm von seiner Stelle für das Manuale beigegeben ist, mit dem Namen, welchen der Führer für denselben angiebt; wobey das Fragzeichen beigesetzt wird, wenn dieser der Angabe nicht ganz gewiß ist.

b. Um in solchen zweifelhaften Fällen nichts desto weniger den Ort oder Stelle nachgehends kennen zu lernen, nach welchem der Winkel genommen wurde, zeichnet der Geograph das Bild, in welchem er sich im Fernrohr präsentiret, in seinen Hauptzügen in das Manuale ab, neben dem Winkel, welchen er in der Station C. für ihn notirt hatte; damit er ihn um so besser erkennt, wenn er von andern Stationen her sein Fernrohr nach ihm richtet, oder nach ihm eine Vision nimmt.

Es findet sich dann am Ende, wenn die Brouillon-Charte entworfen ist, der Name eines solchen Orts aus seinen benachbarten, oder auch aus den bisher von dem aufzunehmenden Lande bereits vorhande-nen Situations-Charten.

c. Da ferner auch der Geograph entfernte Orte um so undeutlicher siehet, je weiter sie von der Station entfernet, je feiner ihr Bild, und je dunstiger die Luft ist, und er ihre Bilder um so sicherer in die Mitte des Fadenkreuzes bringen kann, je deutlicher er sie siehet, so bemerkt er deswegen auch im Allgemeinen auf jeder Station die Farbe des Himmels, und insbesondere die Deutlichkeit, in welcher er jeden Ort im Fernrohr sahe.

Rücksichtlich der Farbe des Himmels bemerkt er vorzüglich, ob derselbe mit detachirten Wolken, oder statt dessen mit den Schäfgen bedeckt war; oder sonst im Ganzen sich in seiner lasurblauen, mit mehr oder minder weiß getünchten Farbe, nach einer Nummer seines Kyrnometers sich darstellte, um hieraus Folgerungen auf die Durchsichtigkeit der Luft abnehmen zu können.

Insbesondere aber liegt dem Geographen daran, den Grad der Deutlichkeit in das Manuale zu notiren, mit welcher er das Bild des entfernten Gegenstandes im Fernrohr siehet; um nach demselben bey der Winkelausgleichung den Grad der Zuverlässigkeit um so besser beurtheilen zu können, mit welcher er einen Winkel vor dem andern gegebenen Orts messen konnte.

Dieser Grad der Deutlichkeit proportioniret sich nach dem kleinsten Punct, welchen der Geograph auf einem entfernten Gegenstand noch beinahe verschwindend sehen kann, welchen er durch Versuche findet.

Siehet nemlich der Geograph einen Thurm in einem Abstand von (d) Fußen, bey der convenabelsten Er-

leuchtung so deutlich, daß er auf ihm die Ritzen in der Mauer, das Bley an den Fenstern und anderes kleines Detail noch unterscheiden kann, so siehet er ihn mit der Deutlichkeit, vom I. Grade; er siehet ihn eben so deutlich, als er ein Miniaturgemälde von ihm in seiner Gesichtsferne, bey der convenabelsten Erleuchtung siehet. Ist ihm nun auf demselben ein Strich auf einem Brettchen von weißem Grunde, das an dem Thurm festgemacht wird, der sich ihm in diesem Abstande unter einem optischen Winkel von ψ Secunden darstellet, beinahe verschwindend, so wird ihm auch auf jenem Thurm ein gleichfarbiger Streifen auf dem nemlichen Hintergrund beinahe in der Breite d.tang $\frac{\psi}{m}$ verschwinden. §. 3. IV.

Verschwindet ihm ein andermal auf dem nemlichen Thurm, oder auch auf einem andern ein Streifen in der Breite d.tang $\frac{2\psi}{m}$, so siehet er ihn nur halb so deutlich, wie jenen; oder er siehet ihn mit der Deutlichkeit II.; er siehet ihn mit der Deutlichkeit III., wenn ihm auf demselben ein Streifen in der Breite d.tang $\frac{3\psi}{m}$, u. s. w. kaum mehr sichtbar ist.

Merket sich nun der Geograph, wie ihm bey diesen Deutlichkeiten sich der Thurm in seinem kleinen Detail, z. E. in seinen Dachziegeln, in der Helmstange, oder auch ein Signal, Baum, u. dergl. sich darstellet, so kann er nach diesem Eindruck auch für andere Thürme, Signale, u. dergl. die Deutlichkeit notiren, in welchen sie sich präsentiren: er notiret z. E. in seinem Manuale die Deutlichkeit III., wenn er die Ziegel auf dem Dache eines Thurms D eben so zu sehen glaubt, als er sie in dem Thurm A sahe, an welchem ihm bey jenem Versuche z. E.

ein

ein schwarzer Strich auf einer Tafel von weißem Grunde in der Breite d'. tang $\frac{3\Psi}{m}$ kaum mehr sichtbar war.

Je mehr Versuche solcher Art der Geograph anstellet, um so zuverlässiger wird er nach denselben den Grad der Deutlichkeit in sein Manuale notiren können, in welcher er entfernte Gegenstände in dem Achromat seines Winkelmessers siehet: es ist auf jeden Fall der letzte oder schwächste Grad der Deutlichkeit jener, wo der Gegenstand nach seinem Abstand, und kleinem Querschnitt, sich so verschleyert präsentiret, daß das Auge sich von seinem Daseyn kaum mehr überzeugen kann.

d. Bey Winkeln, an welchen dem Geographen vor andern lieget, muß derselbe auch die Deutlichkeit notiren, mit welcher er einen solchen Winkel auf dem Limbus ablesen konnte.

Diese Deutlichkeit ist auf jeden Fall die der I. Classe, wenn er den Limbus bey der convenabelsten Erleuchtung zu einer Zeit siehet, wo seine Augen durch anhaltendes Visiren noch nicht ermüdet sind.

Es ist die Deutlichkeit des Ablesens schon geringer, wenn der Geograph seine Augen bereits stark angestrengt hat; sie ist noch geringer, wenn auch die Erleuchtung des Limbi unter der convenabelsten des Auges ist; welcher Fall eintritt, wenn auch bey heiterer Luft, der Schatten der Wolken die Gegend des Instruments trift; oder auch, wenn der Geograph entfernte Gegenstände in der Abenddämmerung observiret, in welchem sie sich auf dem leuchtenden Hintergrunde am schönsten präsentiren; oder auch, wenn er bey Nacht nach Feuersignalen visiret (IV. d.), und deswegen den Limbus durch ein Licht erleuchten muß.

Diese Deutlichkeit des Ablesens bestimmt sich nun durch die Entfernung, in welcher die Theilstriche des Limbi dem Auge verschwinden!

Verschwinden nemlich diese Striche bey der größten Deutlichkeit in einem Abstand von 14 Zollen, ein andermal aber bey geringerer Erleuchtung schon in 12 Zollen, so verhalten sich die Deutlichkeiten, in welchen das Auge die Theilstriche, nach seiner eigenen Beschaffenheit und nach den äußern Umständen siehet, wie $1 : \frac{1}{1}\frac{2}{4} = 1 : \frac{6}{7}$. u. s. w.

Es notiret daher der Geograph die größte Deutlichkeit, in welcher er den Limbus siehet, mit der Zahl 14; die andere mit 13; die dritte mit 12 u. s. w. in sein Manuale; um sich in der Folge bey der Winkelausgleichung darnach richten, oder auf einen Winkel einen größern oder kleinern Werth setzen zu können.

Wo das Signal wegen dem Sturm, welchem es seines Orts ausgesetzt ist, im Fernrohr zu zittern scheinet, oder der Sehestrahl, in dem er mehr am Boden vorbeygehet, und verschiedene von demselben ausdünstende Gasarten passiret, und deswegen eine zitternde Bewegung annimmt, oder die Luft selbst beim Winde eine wellenförmige Bewegung zeiget; muß der Geograph auch diesen Umstand in sein Manual notiren; weil er den Gegenstand um so unsicherer in die Mitte des Fadenkreuzes stellen kann, je stärker sein Bild zittert.

Auf hohen Thürmen bringt selbst der Pendel der Schlaguhr, den Thurm selbst in eine oscillirende Bewegung.

e. So wie nun der Geograph den Winkel ACB in (a) mißt, so mißt er auch jeden andern, bey unverrückter Stellung seines Versicherungs-Rohrs, oder er mißt sie sämmtlich von dem gewählten Anfangspunct, um den ganzen Horizont herum; und notiret die sich dabey ergebenden Elevations- und Depressionswinkel der Objecte in sein Manuale. Es bleibt überhaupt für ihn Maxime, auf alle und jede, ihme auf einer solchen Haupt-

Sta-

Station sichtbare in die Charte aufzunehmende Gegenstände, die Winkel wenigstens einmal oder en passant zu nehmen; weil er nicht weiß, wozu er einen und den andern, den er vorläufig übergehen zu können glaubet, in der Folge gebrauchen kann.

Insbesondere aber bemühet sich der Geograph, die Winkel für Gegenstände, welche den Verband seiner Dreyecke der ersten Classe constituiren, so genau als nur immer möglich ist, durch ihre Multiplication zu messen.

Wäre daher der Winkel ACB in (a) ein solcher Winkel, so mißt ihn der Geograph zu einer Zeit, wo der Gegenstand B die schönste Erleuchtung hat, nach (a); drehet nun den Geodoliten so lange herum, bis der Gegenstand A sich mitten in dem Fadenkreuz des Fernrohrs der Alhidade zeigt; arretiret das Instrument in dieser Stellung, und drehet die Alhidade so lange, bis der Gegenstand B in der Mitte des Fadenkreuzes des Fernrohrs der Alhidade erscheint, liest nun die Winkel ab, welche die 4 Nonien anzeigen; und notiret diese in sein Manuale.

Hat der Geograph auf diese Art den doppelten Winkel gemessen, so drehet er abermals das Instrument so lange herum, bis ihm der Gegenstand A wieder in die Mitte des Fadenkreuzes des Fernrohrs der Alhidade tritt, arretiret dasselbe in dieser Stellung; drehet nachgehends die Alhidade, bis der Gegenstand B wieder in die Mitte des Fadenkreuzes kommt, und lieset nun den dreyfachen Winkel nach den vier Nonien ab.

Auf diese Art kann der Geograph die Aufnahme des Winkels ACB beliebig fortsetzen, bis er den Kreis ein oder etlichemal durchlaufen hat.

f. Dieses Verfahren gewähret den Vortheil, daß kleine, von der unmerklichen Excentricität des Instruments herrührende Fehler, ja selbst kleine Theilungsfeh-

ler

ler des Limbi, und jene, für welche der Geograph in der Richtung der Fernröhre nicht mehr stehen kann, sich wechselseitig gegen einander aufheben können; so daß man also den Winkel um so genauer erhält, je öfter man ihn multiplicirt hat.

Uebrigens findet sich der Winkel aus seiner Multiplication folgendermaßen.

Es habe z. E. das Mittel aus den 4 Nonien gegeben, nach der

Beobachtung	den Winkel	Beobachtung	den Winkel
I.	36 „ 24 „ 32,5	IV.	145° „ 38′ „ 6,0
II.	72 „ 49 „ 2,4	V.	182 „ 2 „ 45
III.	109 „ 13 „ 36,2	VI.	218 „ 27 „ 16

Theilet man diese Bogen durch die Zahl der ihnen zukommenden Beobachtungen, so geben die Quotienten für sie folgende Resultate:

Bogen	Winkel	Bogen	Winkel
I.	36° „ 24 „ 32,5	IV.	36 „ 24 „ 31,5
II.	36 „ 24 „ 31,2	V.	36 „ 24 „ 33,0
III.	36 „ 24 „ 32,6	VI.	36 „ 24 „ 32,6

Nehme ich nun unter diesen den kleinsten (II.) heraus, so sind die Differenzen der übrigen Winkel folgende: 0; 1,3; 1,4; 0,3; 1,8; 1,4; welche durch 6 getheilt einen Winkel von 1,033 Secunden geben, für welchen der Beobachter in dem wahren Maaß des gemessenen Winkels nicht mehr stehen kann.

Treffen die Indices der Nonien nicht aufs genaueste mit den Puncten 0 „ 90 „ 180 „ 270 der Theilung des

Lim-

Limbi zusammen, so muß auch der Excedens oder Defect in Rechnung gebracht werden.

Es sey z. E. der Stand der Nonien, vor und nach der Winkelaufnahme folgender:

Nonius.	Vor der Winkelmessung.	Nach der Winkelmessung.
0	0° „ 0′ „ 0″	66° „ 25′ „ 30″,0
I.	90° „ 2 „ 25 „	156 „ 27 „ 45 .
II.	180 „ 4 „ 20	246 „ 30 „ 0 .
III.	270 „ 5 „ 40	336 „ 31 „ 30 .
	12 „ 25	114 „ 45 .

Ziehet man hievon den summarischen Exceß der Nonien ab, und theilet dann die Differenz durch die Anzahl derselben, so ist

$$\frac{114' \text{„} 45'' - 12' \text{„} 25''}{4} = 25' \text{„} 35''.$$

Nun hatte der Nonius 0 den Limbus 5mal, bey einer 50maligen Multiplication des Winkels durchlaufen, und zeigte auf demselben noch 66°; es ist daher das 50fache des gemessenen Winkels

$$5 \cdot 360° + 66° \text{„} 25' \text{„} 35'' = 1866° \text{„} 25' \text{„} 35'';$$

mithin der einfache mit möglichster Schärfe gemessene Winkel $37° \text{„} 19' \text{„} 42'',7$.

g. Wo mehrere in die Charte aufzunehmende Gegenstände mit der Station in einerley Verticalebene liegen, streichet der Geograph einen solchen Winkel in seinem Manuale vor; damit ihm ein solcher wichtiger Umstand, von welchem er in der Folge guten Gebrauch machen kann, nicht entgehen könne.

Er

Er summiret außerdem auf jeder solchen Station, welche die horizontale Winkelaufnahme ringsum gewähret, die Summe aller um den ganzen Horizont, oder im Gyrus gemessenen Winkel, um durch ihre Controle mit den 360° vorläufig sich von der Genauigkeit seiner Arbeiten zu überzeugen.

h. Mißt der Geograph mit einem Instrument, dessen Fernrohr keine Kippe hat, oder mit dem Bordaischen oder le Noirschen Kreise, so bringt er bey der Aufnahme eines Winkels ACB in (a.) die Ebene seines Limbi in die Ebene durch die Puncte A„C„B selbst, und mißt so den schiefen Winkel einfach oder auch vielfach (e.), nach den bisherigen Maximen: er mißt außerdem auch die Elevations- und Depressions-Winkel der Objecte A„B mit einem bey sich habenden Höhenmesser; um nachgehends den gemessenen Winkel auf den Horizont reduciren zu können.

i. Wenn der Geograph auf Thürmen oder andern Gebäuden Winkel mißt, muß er mit einer steinernen Platte versehen seyn, auf welcher er sein Instrument aufstellet; weil die Gesimse der Schallöcher und Fenster öfters für sein Instrument zu schmal sind, oder die Dielen sich an der Sonne werfen.

Diese Platte muß durch eiserne Zwingen in die Schallöcher und Fenster, oder auch auf die Geländer der Gallerie, sich befestigen lassen; und mit einer Strebe versehen seyn, die von dem Stein nach der Wand des Thurms sich stützet; damit das Instrument von der schwankenden Bewegung des Fußbodens nicht afficirt wird, wenn der Geograph auf demselben nicht immer stille stehet.

Es muß ferner der Geograph immer die Mitte des Thurms auf das genaueste suchen, über derselben einen Senkel aufhängen, und von jedem Stand, welchen

chen er mit dem Instrument auf dem Thurm nimmt, nach demselben visieren und hinmessen; oder auch nur das Fernrohr über dem Limbus so lange drehen, bis es mit dem Faden des Senkels in einerley Verticalebene kommt; wornach der Stand des Nonii der Alhidade notirt wird. Er findet dadurch die Data für die Centrirung der gemessenen Winkel.

Wo man nach der Mitte des Thurms, oder nach der Verticale jenes eminenten Theils eines Gebäudes, nach welchem man von ferne visieret, nicht sehen, also auch nicht messen kann; begnügt man sich, den Abstand der Lothlinie des Instruments von jener senkrechten nur beyläufig zu messen, und den Abweichungswinkel zu schätzen; es fällt aber nachgehends die Centrirung um so unsicherer aus, je unzuverlässiger jene Schätzungen nach Umständen ausfallen müssen.

k. Uebrigens bleibt es Hauptmaxime des Geographen, bey seinen Hauptdreyecken, deren Spitzen in seinen pyramidalen Signalen (IV.) liegen, immer alle drey sphärische Winkel, unmittelbar, und zwar durch Multiplication (e) zu messen; damit er sie nachgehends durch ihren sphärischen Exceß ausgleichen kann.

Er verfolget ferner bey der Winkelaufnahme, die bey dem Recognosciren (III.) entworfene Hauptdreyecksreihe in ihrer Continuität, in der sich diese Dreyecke unmittelbar anschließen; er arbeitet sich zunächst nach jenen Gegenden hin, wo er beim Recognosciren ein und andere Grundlinien entworfen, oder auch bereits gemessen hat.

Nur wo Winkel auf hohen Bergen aufgenommen werden müssen, die nur zu gewissen Zeiten zugänglich sind, wird dieser Typus der Winkelaufnahme so lange unterbrochen, bis man auf solchen Bergen die Winkelmessung vollendet hat.

Letzt-

Letztlich berechnet der Geograph nach der vorläufig gemessenen Grundlinie, die Dreyecke selbst nur als geradlinichte, und träget sie nach einem kleinen Maaßstab auf, um sein Brouillon (III.) immer besser zu complettren, und durch dasselbe seine Operation zu erleichtern.

Aufnahme astronomischer Winkel.

VII. Operiret der Geograph mit einem le Noirschen Repetitionskreis, so kann er die Ebene seines Limbi auch in verticale Stellung bringen, und so den Kreis selbst in dieser Stellung an seiner Säule über dem Azymuthalring herumdrehen, in dessen Mitte die Säule selbst, mit dem an ihr festen Index, central beweglich ist.

Bedienet sich statt dessen der Geograph zu seinen geometrischen Operationen eines Geodoliten, dessen oberes Fernrohr in einer Kippe gehet, so muß er für seine astronomischen Operationen, einen eigenen Höhenkreis mit sich führen, oder wenigstens nach solchen Standpuncten oder Stationen transportiren lassen, welche er beim Recognosciren für solche Arbeiten am schicklichsten ausersehen hat.

a. Ein solcher Höhenkreis bestehet nun immer aus einem gehörig eingetheilten Limbus, welcher in verticaler Stellung, nicht nur um eine Spindel gedrehet, sondern außerdem auch in jener Stellung an einer Säule central um den ganzen Gyrus des Horizonts herum bewegt werden kann.

Diese Säule, welche den Träger des Ganzen ausmacht, wird nun ihres Orts in ihrem Gestelle feste gestellt, und verspannet; oder sie ist auch über einem Azymuthalring beweglich, der auf seinem Fußgestelle ruhet, durch dessen Stellschrauben das ganze Instrument seinen gehörigen Stand erhält. Die Scize eines solchen Instruments

strumentes stellet Tab. IV. vor; dessen wesentliche Eigenschaften folgende sind!

In demselben ist nun MNLP der Limbus des Höhenmessers, dessen Spindel HU in der Säule QC central und fatt beweglich ist, während die Säule selbst, mit dem an ihr festen Index CO sich in dem Azymuthalring DOF central beweget.

In dem Rande des Limbi streifet ferner die Alhidade, oder eigentlich, eine mit ihren 4 Nonien versehene Scheibe fatt an, auf welcher das Fernrohr GK parallel mit der Ebene des Limbi, und außerdem eine Libelle feste ist, wo diese sich nicht über dem Fernrohr selbst befindet; dessen Axe vorläufig möglichst parallel mit der Linie von o bis 180 des Limbi gestellet wird.

Eine andere Libelle ist außerdem an der hintern Seite des Limbi in der Richtung US auf einer Schiene, beinahe parallel mit der Linie von o bis 180 angebracht, und kann auf dieser durch Stellschrauben auf und nieder um einen kleinen Winkel verrückt, und nachgehends feste und unbeweglich gestellt werden.

Dabey giebt man ferner dem Limbus gewöhnlich seine Verticalstellung, indem man an ihn einen Senkel erhält, und den Limbus so lange stellt, bis der Faden ihn ganz berühret.

Da aber dieses Verfahren, insbesondere bey nächtlichen Beobachtungen sehr trüglich ist, so ist es immer besser, an der hintern Seite des Limbi, senkrecht auf seine Ebene, auch in dem Support eine Libelle ST anzubringen, deren Einspielen den verticalen Stand des Instruments gewähret.

b. Wäre nun die Axe der Libelle auf der Alhidade und auf der hintern Seite des Limbi genau parallel mit der Axe des Fernrohrs, und diese parallel mit der Linie von o bis 180 des Limbi, und außerdem der Limbus

selbst

selbst genau vertical gestellt, so werden mit dem Höhenkreis die höhern Winkel, oder auch Zenithdistanzen, einfach und multiplicationsweise folgendermaßen genommen!

Man stellet den Index des Nonii o der Alhidade aufs genaueste über den o Punct der Theilung des Limbi, notiret den Stand der übrigen Nonien I „ II „ III; drehet den vertical gestellten in die Ebene des Gegenstandes vorläufig gerückten Limbus in seiner Spindel HU so lange, bis die Luftblase seiner Libelle an ihren Spielpunct aufs genaueste einspielet; und stellet die Alhidade feste.

Nun eleviret man das Fernrohr nach dem Gegenstand, so daß dessen Bild beinahe den Horizontalfaden desselben schneidet, und hilft nun durch die sanfte Bewegungen dem Fernrohr und dem Limbus zur Seite so lange nach, bis der wirkliche Contact des Bildes mit dem Faden eintritt, während der Limbus sich in seiner Verticalebene befindet; und notiret nun den Stand der 4 Nonien.

Will man Winkel multiplicationsweise (VI. e.) nehmen, so lässet man das Fernrohr in seiner festen Stellung, und drehet nun den Limbus in seiner Spindel HU so lange, bis die Blase der Libelle der Alhidade wieder auf ihren Spielpunct einspielet; stellet nun das Instrument feste, und nimmt den Winkel zum andernmal: man wiederhohlet diese Manipulation wieder, wenn man den Winkel zum drittenmal nehmen will; und fährt überhaupt so lange fort, bis der Index des Nonii o, und mit ihm alle übrigen, den Limbus ein oder mehrere mal ganz durchlaufen haben.

Will man mit dem Höhenkreis, Verticalwinkel zu beiden Seiten des Zeniths oder vor- und rückwärts nehmen, so wendet man in dem Moment, in welchem der erste Elevationswinkel genommen worden ist, in seiner Säule Qe um 180 Grade behende um, berichtigt

richtigt den Stand des Instruments nach seiner Libelle US und ST; und nimmt nun den vorigen Winkel noch einmal; wobey der Index der Nonien also den doppelten Bogen durchlauft; den man nachgehends bisectiret, und durch den Stand seiner 4 Nonien ausgleichet.

Ist der Gegenstand die Sonne, so ist es immer räthlich, das einemal den untern, das anderemal aber den obern Rand derselben zu nehmen, damit man jene kleine Fehler vermeidet, um welche man in dem scheinbaren Halbmesser der Sonne noch ungewiß ist.

Wenn statt dessen die Tangenten der Libellen nicht parallel mit der Axe des Fernrohrs, und mit der Linie von o bis 180 des Limbi sind, so fehlet man in der Höhe des Gegenstandes, oder auch in seinem Horizontalabstand um den Winkel, welchen die Tangente oder Axe der Libelle mit der Axe des Rohres macht, in soferne man die Winkel nur von einer Seite nimmt. Dieser Winkel heißt der Callimationsfehler des Instruments.

c. Diesen Winkel zu finden, verfähret man am füglichsten folgendermaßen:

Es stellet nemlich der Beobachter den Index des Nonii o genau auf den o Punct der Theilung des Limbi, oder auf die Linie NP, und bringet denselben in verticaler Stellung beiläufig in die Verticalebene eines irdischen, mithin unbeweglichen Gegenstandes A; drehet nun den Limbus um seine Spindel HU so lange, bis die Luftblase der Libelle WS geuau auf ihren Spielpunct einspielet; bringt den festgestellten Limbus durch die sanfte Bewegung seiner Verticalsäule QC genau in die Ebene des Gegenstandes A selbst; lässet die Libelle WS aufs genaueste einspielen, und nimmt nun den Elevationswinkel desselben.

Nach diesem wendet der Beobachter sein Instrument um 180 Grade herum, bis seine linke Seite genau wieder

der

der in die Verticalebene des Gegenstandes A kommt; stellet in derselben den Limbus durch die Libelle ST genau vertical; führet den Index der Alhidade genau auf die Linie NP zurück, und drehet nun den vertical gestellten Kreis um seine Spindel HU so lange, bis die Blase der Libelle WS wieder auf ihrem Spielpunct einspielet, wornach der Kreis fest gestellet wird.

Nun nimmt der Beobachter abermals den Elevationswinkel des Gegenstandes A, und vergleichet ihn mit den zuvor genommenen.

Treffen nun beide Winkel aufs genaueste zusammen, so ist die Axe der hintern Libelle WS ganz mit der Axe des Fernrohrs parallel; es wird mit derselben auch die Axe der Libelle der Alhidade parallel gemacht, wenn man sie ihres Orts so lange durch ihre Stellschrauben auf und nieder beweget, bis auch ihre Blase auf ihrem Spielpunct einspielet.

Differiren statt dessen beide Elevationswinkel um einen Winkel $= \gamma$; so ist die Abweichung der hintern Libelle WS von der Axe des Rohrs dem Winkel $\frac{1}{2}\gamma$ gleich, welchen man den Collimationsfehler des Justruments nennt.

Dieser Winkel kann nun sofort bey Höhenmessungen von einerley Seite in Rechnung gebracht werden; er hebet sich auf, wenn die Elevationen vor- und rückwärts genommen werden; man bringt statt dessen diesen Fehler ganz auf o, wenn man durch Anziehen der Stellschrauben der Libelle WS deren Stand so lange ändert, bis das Instrument den Elevationswinkel des Gegenstandes A immer gleich groß anspricht, es mag seine rechte oder auch seine linke Seite nach demselben gerichtet seyn.

Zuverlässigkeit der Winkelmessung mit einem Geodolithen ohne Fehler.

VIII. Wenn nun auch der Geograph auf jeder Station seine Winkel nach (VI.) mit dem größten Fleiße, unter den günstigsten äußern Umständen, mit einem Geodolithen mißt, der keinen Fehler hat, so ist es dennoch nur vom Zufall abhängig, ob er das wahre geometrische Maaß des Winkels getroffen, oder ihn mathematisch richtig gemessen hat!

Denn indem er das Bild des entfernten Gegenstandes in die Mitte des Fadenkreuzes zu bringen hat, kann er einmal um so viel dabey fehlen, als sein Augenmaaß ihn trüget, §. 3. V.; er kann außerdem auch bei'm Ablesen des Winkels auf dem Limbo um einen Winkel fehlen, um welchen er in dem Stand der zupassenden Theilstriche des Limbi und des Nonii nach seinem Augenmaaß sich verschätzen kann!

a. Glaubt z. E. der Geograph, daß sich die correspondirende Theilstriche aufs genaueste anschneiden, so ist er dessen doch nur bis auf einen Streifen gewiß, der ihm unter der Luppe verschwindet, und als solcher in dem Centro des Winkelmessers einen gewissen Winkel mißt.

Es sey z. E. der Winkel, unter welchem dem Geographen ein feiner Strich auf dem Limbus beinahe verschwindet $= \lambda$; indem er denselben in einem Abstand (δ), bey einer gewissen Erleuchtung am beßten siehet; so hat dieser Strich die Breite $\delta . \text{tang}\, \lambda$; vergrößert ihn nun die Luppe (n)mal, so ist der beinahe zu verschwindende Strich $= \frac{1}{n} . \delta . \lambda$, wenn λ in Theilen des Halbmessers ausgedrückt wird.

Bezeichnet ferner (r) den Halbmesser des Theilrisses, und (ε) den Centerwinkel jenes Strichs, so ist auch $r . \varepsilon = \frac{\delta . \lambda}{n}$; und $\varepsilon = \frac{\delta . \lambda}{n . r}$ 206262 in Secunden.

Für

Für mein Auge ist, nach §. 3. a., bey der convenabelsten Erleuchtung der Winkel $\lambda = 5$ Secunden, und $\gamma = \frac{1}{2}$ Fuß; mithin der mir beinahe auf dem silbernen, oder wenigstens silberplattirten Limbus verschwindende Strich $= \frac{1}{2} . 0,00002424 = 0,00001212$.

Vergrößert die Luppe, durch welche ich den Strich sehe, gerade 10mal, so ist der meinem Auge auf dem Limbus beinahe verschwindende schwarze Strich $= 0,000001212$. eines Fußes.

Ist ferner der Halbmesser des Theilrisses des Instruments $r = \frac{2}{3}$ Fuß, so ist sonach der Winkel

$$\varepsilon = \frac{0,000001212}{\frac{2}{3}} \cdot 206264 = 0,371 \text{ Secunden.}$$

Für diesen Winkel könnte ich also bei'm Ablesen eines Winkels nicht stehen, ob der eine Theilstrich den correspondirenden nicht überschneidet, wenn ich glaube, daß beide sich aufs genaueste mitten einschneiden.

Dieser Winkel wird um so größer, je undeutlicher ich die Theilstriche des Limbi, bey einer schwachen Erleuchtung sehe: er wird noch größer, wenn die Theilstriche selbst nicht gleich scharf in den Limbus eingerissen sind.

Auf diese gleiche Schärfe der Theilrisse hat insbesondere der Guß des Instruments Einfluß. Gießet man nemlich den Limbus, während seine Form vertical stehet, so wird das Metall im Nadir am dichtesten; es wird statt dessen im Zenith wohl gar porös, wenn bei'm Giessen nicht ein schwerer Kopf aufgesetzt wird, welcher den Druck giebt.

Vorsichtige Künstler gießen daher ihre Instrumente immer in horizontaler Lage, wobey der Druck eines tüchtigen Kopfes nach allen Seiten gleich stark, mithin auch der Limbus in seiner Substanz ringsum gleich dichte wird;

wird; der Zahn des Hobels, mit welchem die Theilstriche gezogen werden, greift daher immer gleich tief ein, und macht gleich breite Striche.

b. Schneidet der Theilstrich den ihm zunächst correspondirenden des Limbi nicht genau mitten an, sondern stehet von diesem etwas weniges ab, so wird dieses Excedens gewöhnlich nach der Breite der Theilstriche selbst verglichen; indem das Auge beurtheilet, ob der Excedens dem halben oder dritten Theil u. dgl. der Breite des Theilstrichs gleich komme.

In diesem Fall kommt also das Augenmaaß des Beobachters in Anschlag; das nach §. 3. IV. um so zuverlässiger ist, je feiner die zu vergleichenden Dinge, mithin je feiner die Theilstriche, für die gegebene Vergrösserung der Luppe sich präsentiren.

Ist nun die Breite der Theilstriche $\frac{1}{100}$ einer Linie, oder $\frac{1}{10000}$ eines Fußes, so nimmt einer in den andern in der Mitte des Instruments einen Winkel von

$$\frac{1.206264}{10000.\frac{2}{3}}$$

oder 30 Secunden ein.

Wenn ich daher glaube, daß der eine Theilstrich den andern um die Hälfte seiner Breite excedirt, so kann ich mich dabey nach §. 3. IV. a. um $\frac{30}{12} = \frac{5}{4}$ Secunden verschätzen; mithin den gemessenen Winkel in einem solchen Fall um $\frac{5}{4}$ Secunden zu groß oder auch zu klein ablesen; wenn ich auch beide Striche aufs deutlichste sehe.

c. Insbesondere aber kommt noch das Augenmaaß des Geographen in Anspruch, bey der Richtung des Fernrohrs nach einem entfernten Gegenstande!

Hier muß nemlich derselbe sein Bild mitten zwischen die Fäden des Fernrohrs bringen; er bleibt deswegen nur auf einen gewißen Theil gewiß, ob das Bild auch

mitten inne ſtehet, wenn er ſich überzeugt hält, daß es wirklich in der Mitte iſt.

Nun bedecken oder überziehen ſich aber die feinen Haare, oder auch die Spinnenfäden des Kreuzes mit einer luftartigen Decke, die um ſo dichter iſt, je gröſſer die Maſſe dieſer Fäden nach ihrer Stärke an und für ſich iſt; und je mehr ſie die luftartigen Stoffe zerſetzen, je dichter ſie ihre luftartige Decke um ſich herum anſetzen. Siehe meine Statik und Dynamik der Phyſik, Abhdl. II. S. 27.

Dieſe luftartige Decken der Fäden berühren ſich in der Gegend des Durchſchnittpuncts der Fäden in einem um ſo gröſſern Spickel, je breiter die Decken an und für ſich ſind, und je kleiner der Durchſchnittswinkel der Fäden iſt; ſie verſchleyern daher nach Verhältniß ihrer Luftdicke in dieſem Spickel den Theil des Bildes des Gegenſtandes, der hinter dieſen Spickel trift, ſo daß dieſer nach Verhältniß jener Dichte um ſo undeutlicher geſehen wird.

Wenn daher der Geograph das feine Bild eines ſehr weit entfernten Gegenſtandes, z. E. eines Signals, zwiſchen die Fäden ſeines Fernrohrs bringen will, ſo würde ihm das ganze Bild verſchwinden, wenn er es hinter jenen Spickel der Undeutlichkeit ſtellen wollte; er muß daher daſſelbe immer über jenem Spickel faſſen, und eine Horizontale durch das Bild fällt daher immer um ſo gröſſer aus, je gröſſer jener Spickel, und je weiter die Fäden aus einander geſpannt ſind.

Dabey kann ferner der Beobachter das Bild um ſo ſicherer in die Mitte dieſer Horizontale ſtellen, je deutlicher er daſſelbe ſiehet; er bleibt in ſeiner Stellung um ſo ungewiſſer, je undeutlicher er das Bild ſiehet, oder je näher es ſeinem Auge verſchwindend iſt.

Scheinet nun diese Horizontale durch das Ocular, dem Geographen eine halbe zwölftheilige Linie breit zu seyn, so kann er in der Richtung des Fernrohrs nach dem Gegenstande um einen Theil fehlen, auf welchem er nach seinem Augenmaaße eine halbe Linie nicht mehr gewiß bisectiren kann, bey einer Helligkeit, die der des Gesichtsfeldes seines Fernrohrs bey der Beobachtung gleich ist.

Dieser Theil nimmt nun aber in dem Objectiv des Fernrohrs immer einen gewissen Winkel ein; und dieser ist es also, um welchen der Beobachter sein Fernrohr nicht sicher richten, oder das Bild des Objects in die Mitte der Fäden über jener Horizontale bringen kann.

Ist die Focallänge des Objects des Fernrohrs 16 Zolle oder 16.12 = 192 Linien, so ist der Winkel, welcher jenen scheinbare halbe Linie in dem Objectivglas einnimmt = $\frac{206264}{2.192}$ = 537 Secunden; und diese kann ich bis auf ihren $\frac{1}{24}$sten Theil sicher bisectiren, §. 3. V.; oder bis auf einen Theil der im Objectiv $\frac{537}{24}$ = $22\frac{3}{8}$ Secunden mißt. Da nun dieser Theil in dem Fernrohr sich 32 mal größer zeiget, als er wirklich ist, so kann ich deswegen in der Richtung der Mitte des Fernrohrs nach einem feinen Object bis auf $\frac{537}{32.24}$ = 0,7 Secunden sicher seyn, wenn ich dasselbe am deutlichsten, in Umständen sehe, wo die Helligkeit des Sehefeldes des Fernrohrs, meinem Auge die convenabelste ist.

Richte ich nun in dem unglücklichsten Fall das untere Fernrohr um diesen Winkel zu viel rechts, und das obere dagegen um denselben zu viel links, so summiret sich dieser Fehler, mit dem Fehler des Ablesens (b) auf 1,4 + 0,37 oder 1,77 Secunden.

Um diesen Theil würde ich also in dem unglücklichen Falle, einen Winkel, den ich nur einmal nehme, zu groß

oder zu klein messen können, selbst mit einem Instrument, das ohne allen Fehler ist.

d. Will der Beobachter diesen kleinen Winkel für sein Instrument und Auge practisch finden, so nimmt er für zwey Gegenstände A und B, den Winkel nach (VI. a.); drehet nun die Mikrometerschraube so lange, bis der Index des Nonii den nächsten Theilstrich ihme genau anzuschneiden scheinet; und notiret die ganzen Revolutionen, mit den übrigen Theilen des Cadrans des Mikrometers.

Nun stellet der Beobachter den Index des Nonii wieder auf den Anfangspunct der Eintheilung des Limbi; nimmt den nemlichen Winkel nochmals mit dem nemlichen Sector des Instruments, und siehet nach, wie viel Theile nun der Cadrans des Mikrometers zeiget?

Zeiget dieser eben so viel Theile wie vorhin, so hat der Beobachter den Winkel einmal wie das anderemal gemessen, oder die unvermeidlichen Fehler haben sich einmal wie das anderemal wechselseitig aufgehoben; zeiget statt dessen der Cadrans andere Theile, so lässet sich die Differenz in dem gemessenen Winkel folgendermaßen finden.

Es sey z. E. der Limbus des Instruments von fünf zu fünf Minuten und die Scheibe oder der Cadrans des Mikrometers in 60 Theile abgetheilt; auch gehen 300 solcher Theile oder fünf Revolutionen der Schraube auf einen solchen Theil des Limbi; so mißt ein Theil des Cadrans gerade eine Secunde.

Hat nun bey der ersten Winkelmessung der Cadrans noch 207 Theile durchzulaufen, bis der Index des Nonii den nächsten Theilstrich anschnitt, bey der andern aber durchlief er nur $204\frac{1}{2}$ Theil, so ist die Differenz in dem gemessenen Winkel $2\frac{1}{4}$ Secunden.

Wiederholet der Beobachter die Messung dieses Winkels mit dem nemlichen Sector des Instruments sehr oft,

so

so werden sich unter den Differenzen auch die größte und kleinste finden; und das Mittel aus diesen beiden wird dem Beobachter eine Differenz geben, auf welche er mit einem Instrument ohne Fehler, einen Winkel rücksichtlich seiner Gesichtsschärfe und seines Augenmaaßes, in gewöhnlichen Fällen, oder meistens sicher nehmen kann; er wird sich derselben um so mehr vergewissern, wenn er diese Operation auch in Umständen wiederholet, unter welchen er den Limbus und den Gegenstand minder deutlich siehet, und das Sehebild seines Fernrohrs nicht die convenabelste Helle hat.

Findet z. E. der Beobachter nach diesen Versuchen, daß er unter den günstigsten Umständen, unter welchen er das Bild des Gegenstandes, und den Limbus mit der Deutlichkeit I. siehet, den Winkel bis auf 2 Secunden sicher messen kann, daß er hingegen denselben nur auf 3 Secunden sicher mißt, wenn er einen Gegenstand nur mit der Deutlichkeit VI. (VI. e.) siehet, so verhalten sich die Zuverlässigkeiten seiner Winkelmessungen wie $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : 3 : 2$; oder letztere ist $\frac{2}{3}$ der erstern.

Siehet er außerdem den Limbus in schwacher Erleuchtung so undeutlich, daß er den Winkel nur auf 4 Secunden sicher messen kann, wenn er den Gegenstand mit der Deutlichkeit (VI.) siehet, so ist die Zuverlässigkeit seiner Winkelmessung nur halb so groß, als die größte, mit welcher er einen Winkel unter den günstigsten Umständen messen kann.

Mißt der Geograph den nemlichen Winkel durch Multiplication, und wiederholet diese Winkelmessung öfters, so findet er eben so auch am Ende aus der Differenz des Cadranten seines Mikrometers, in wiefern sich die Winkeldifferenzen angehäuft oder wechselseitig aufgehoben haben: er findet eine größte und kleinste Differenz,

renz, deren Mittel er durch die Zahl der gemachten Wiederholungen theilet. Es ist die Differenz, welche sich hieraus ergiebt, die mittlere ausgegleichte für Multiplicationswinkel von gegebenen Wiederholungen.

Diese mittlere Differenz findet sich der Erfahrung zufolge, für einen Reichenbachischen Geodoliten von 18 Zollen Durchmesser, wenn multiplications-weise gemessen wird, zu 2 Secunden; für einen Be-obachter von vorzüglicher Gesichtsschärfe, der außerdem sein Augenmaaß gehörig perfectionirt, und die erforderliche Uebung und Gewandheit im Observiren sich erworben hat; und es begreift dieselbe noch außerdem jene kleinen Fehler in sich, die in der unmerklichen Excentricität, und selbst auch in der Theilung liegen möchten.

e. Ist das Bild des entfernten Gegenstandes so breit, daß der Geograph seine Extremitäten mit beiden Fäden des Fadenkreuzes selbst unmittelbar anschneiden kann, so kann er das Fernrohr nach ihm zuverlässiger richten, als nach einem Gegenstand, der sich wie in (c) nur wie eine Nadel präsentiret.

Denn er bleibt in diesem Fall nur bis auf einen Winkel ungewiß, welchen der Punct im Objectiv einnimmt, der ihm auf seinem Bilde beinahe verschwindet.

Dieser Punct ist für mein Auge 0,00001212 nach (a); mithin für eine 32malige Vergrößerung, und für eine Focallänge des Objectivs von 16 Zollen; jener Winkel in Secunden

$$\frac{0{,}00001212 \cdot 206264}{32 \cdot \frac{4}{3}} = 0{,}58 \text{ Secunden.}$$

f. Zeiget sich das Bild des entfernten Gegenstandes im Fernrohr so breit, daß es selbst die größte Sehne des Fadenkreuzes rechts und links überschneidet, so hängt die Zuverlässigkeit der Vision, ob nemlich dieselbe genau

nach

nach der Mitte des Objects gehet, von dem Augenmaaß des Beobachters in so weit ab, als er nach demselben die excedirende Theile für gleichbreit erachtet; er kann in der Richtung des Fernrohrs um so mehr fehlen, je breiter das Bild über die Fäden rechts und links vorsticht, je undeutlicher sich das Bild zeiget, und je schlechter sein Augenmaaß selbst ist.

Es excedire z. E. das Bild das Fadenkreuz rechts und links erachtlich um eine Linie, und zeige sich dabey aufs deutlichste.

Nun kann ich aber unter diesen Umständen, nach meinem durch den Betrieb des Kunstfachs geübten Augenmaaß, eine Linie bis auf ihren $\frac{1}{36}$ten Theil sicher bisectiren. Da nun der Winkel, welcher an der Stelle des Bildes in dem bisher betrachteten Fernrohr einer Linie zukommt, nach (c.), gerade 2.537 = 1074 Secunden; wovon $\frac{1}{36}$ gerade 29,533 Secunden ist.

Vergrößert nun das Fernrohr 32 mal, so würde ich in der Vision nach diesem breiten Object um $\frac{1074}{36.32}$ oder 0,932 Secunden fehlen können: es würde ein anderer um das Doppelte fehlen können, dessen Augenmaaß nur halb so gut ist.

g. Hat das Fernrohr statt des schiefen oder Andreaskreuzes ein senkrecht stehendes, so müssen mit dessen verticalen Fäden die Objecte in ihrer Mitte geschnitten werden; und es hängt die Zuverlässigkeit der Vision von dem Augenmaaß des Beobachters, wie in (f.); ab, in wieferne er die links und rechts des Fadens excedirende Theile für gleichbreit erachtet; es ist die Zuverlässigkeit der Vision um so größer, je weniger das Bild den Faden excediret.

Ist das Bild des Gegenstandes so schmal, daß es augenscheinlich gerade von dem Faden bedeckt wird, so ist

der

der Beobachter seiner Vision bis auf einen Winkel gewiß, welchen der Streifen des Bildes in dem Objectiv einnimmt, welcher auf ihm seinem Auge verschwindend ist (c).

Ist aber das Bild noch schmäler als der Faden, so kann der Beobachter in der Vision um einen Winkel variiren, welcher der halben Differenz der Winkel gleich ist, welchen der Faden und das Bild im Objectiv des Fernrohrs einnimmt.

h. Bey dem Spiegelsextanten hat bekanntlich sein Fernrohr kein Fadenkreuz, weil man bey der Aufnahme eines Winkels ACB das reflectirte Bild des Gegenstandes B, unter das dioptrische des A aufs genaueste bringt.

Dabey hängt nun die Zuverlässigkeit der Vision zunächst von der Breiten-Differenz beider Bilder, von dem Augenmaaß des Beobachters, und von der Deutlichkeit ab, mit welcher er beide Bilder, und insbesondere das reflectirte Bild des B in dem Fernrohr siehet.

Letztere ist insbesondere in nächster Beziehung mit der Erleuchtung des Objectes B, seiner photometrischen Weiße, und Verschleyerung durch die Luft nach seiner Entfernung und Beschaffenheit der Luft; und außerdem hat auch noch die Lichtschwächung in beiden Spiegeln, und vorzüglich der mehr oder minder schiefe Winkel, unter welchem die Strahlen auf dieselben fallen, auf die Vision großen Einfluß; weil das reflectirte Bild, bey sonst übrigen gleichen Umständen, immer um so matter gesehen wird, je mehr das Licht auf den Spiegeln bey einem schiefen Einfall sich zerstreuet.

Uebrigens lässet sich die Zuverlässigkeit der Vision nach den bisher aufgestellten Ansichten berechnen; sie ist gewöhnlich 5 bis 6mal geringer, als für einen Geodolithen von gleichem Halbmesser.

§. 5.

§. 5.

Einfluß der Construction eines Geodoliten auf die durch ihn gemessene Winkel.

Prüfung der Concentricität eines Geodoliten.

I. Ein Geodolite, wenn er auch von dem Künstler mit der größten Genauigkeit construirt, und verificirt würde, ist auf dem Transport mancherley Zufällen unterworfen, wornach sich bey ihm gewisse Dinge in etwas außer ihren erforderlichen Lagen begeben können; so daß er das wahre Maaß der gemessenen Winkel nicht mehr so genau angiebt, als er dieselbe zuvor angesprochen hatte! Es ist daher nothwendig, daß der Geograph diese Abweichungen seines Instruments entdecken, und wo nicht denselben ganz abzuhelfen, doch wenigstens dieselbe indessen in Rechnung zu bringen verstehe, bis er Gelegenheit findet, sein Instrument wieder gänzlich herstellen zu lassen.

Da nun zu den wesentlichsten Eigenschaften seines Geodoliten immer zunächst der concentrische Gang der Alhidade mit dem Mittelpunct der Eintheilung seines Limbi gehöret; und gerade diese Concentricität einer der wichtigsten Umstände bey der Construction des Instruments an und für sich ist; so muß deswegen der Geograph, ehe er seine Operationen beginnet, und selbst während derselben, mitunter die Concentricität seines Instruments zu prüfen oder zu verificiren nicht unterlassen!

Diese Verification der Concentricität des Instruments beruhet aber in folgendem.

a. Wenn nemlich der Mittelpunct der Bewegung der Alhidade aufs genaueste mit dem Mittelpunct des Theil-

risses

risses des Limbi zusammen trift, so ist der Geodolit concentrisch; und es spricht deswegen nach Fig. 4. der Nonius A der Alhidade, welchen der Beobachter gerade vor sich hat, den Winkel OCA eben so groß an, als der Nonius B den Winkel BCN angiebt; wenn die Linie ON die Fiduciale durch o und 180 Grade hier vorstellet.

Statt dessen aber weichet der Index des Nonii B von der Fiduciallinie OW um 15 Secunden zur Linken ab. Verrücket nun der Geograph den Index des Nonii A um den Bogen OA von 20 Graden, so zeiget der Index des B 200°„0′„20″, statt dessen er nur 180+20 oder 200 Grade zeigen sollte.

Wird der Index A um den Bogen OA von 30 Graden verschoben, so zeiget der B 210°„0′„40″, statt dessen er nur 30+180 oder 210 Grade zeigen sollte: er differirt also um 37 Secunden. Führet man den Index A um den Bogen AL weiter, so nimmt jene Differenz immer mehr und mehr ab, bis endlich der Nonius A und B wieder in der Linie GH zusammen treffen, wo der eine 315 Grade in G, der andere in H aber 235 Grade zeiget.

Unter diesen Umständen fällt daher die Excentricität des Geodoliten in die Linie GH, und der Winkel $GCO = 360 - 315 = 45$ Grade ist ihr Directionswinkel.

Da ferner der Nonius B am stärksten abweichet, wenn der Nonius A sich in A befindet, so stehet die Richtung der Excentricität DC auf die Linie ADF senkrecht, und es ist der Winkel DAC halb so groß als der Centerwinkel $FCB = 38$ Secunden.

Setzt man daher in der Allgemeinheit den Center- oder größten Abweichungswinkel $FCB = \alpha$; den Halbmesser des Theilrißes $AC = \varepsilon$; und die Excentricität $DC = \delta$; so ist in dem Dreyeck DAC

$$1 : AC = \sin \tfrac{1}{2}\alpha : DC; \quad \delta = \varepsilon . \sin \tfrac{1}{2}\alpha;$$

oder

oder weil der Winkel α immer nur sehr klein seyn wird,

$$\delta = \tfrac{1}{2}\varrho . \alpha .$$

Für den Halbmesser $\varrho = 8$ Zolle oder $\frac{2}{3}$ Fuße, war $\alpha = 38$ Secunden; also ist

$$\log \tfrac{1}{2}\alpha = 6{,}7647561 - 10.$$
$$\log \varrho = 2{,}8239087 - 3.$$
$$\log \delta = 4{,}9408474 - 8.$$
$$\delta = 0{,}00087266. \text{ Fuß.}$$

Würde daher der Nonius B von dem A dort, wo er am stärksten abweichet, eine Differenz nur von 4 Secunden zeigen, so würde die Excentricität des Geodoliten auch 10mal kleiner oder 0,000087. seyn.

Eine so schwache Excentricität kommt gewöhnlich daher, daß entweder der Central-Zapfen der Theilmaschine auf ihr nicht mathematisch senkrecht ist; oder auch, daß die hintere Ebene des Instruments nicht genau parallel mit seiner obern Ebene ist; mithin der Zapfen, um welchen sich die Alhidade drehet, nicht genau senkrecht stehet.

Man hilft diesem Umstande öfters dadurch ab, daß man zwischen die Scheibe dieses Zapfens und die hintere Ebene des Limbi dort einen Papierstreifen einklemmet, wo die Nonien die größte Abweichung zeigen.

Ueberhaupt bleibt es immer die Sache des Künstlers, die Excentricität seines Instruments, so weit es nur immer möglich ist, durch solche Versuche verschwindend zu machen, und der Scheibe des Central-Zapfens nachgehends die gehörige feste Stellung zu geben; damit er durch das Schütteln des Instruments bei'm Transport, sich nicht im mindesten verrücken kann.

Correction eines mit einem excentrischen Geodoliten gemessenen Winkels.

II. Sollte nun der Geograph sich bemüßiget sehen, mit einem Geodoliten, dessen excentrischen Gang er, nach

nach (I.), kennen gelernt hat, in dessen Winkel zu messen, bis diesem fatalen Umstand, durch die Hand eines geschickten Künstlers, abgeholfen werden kann, so muß er jeden gemessenen Winkel durch die Excentricität, auf folgende Art verbessern.

Will der Geograph einen Winkel ABD messen, so stellet er den Index seines Nonii aufs genaueste auf den Anfangs- oder ○Punct der Eintheilung; drehet nun das Instrument so lange, bis er das Object A in die Mitte des Fadenkreuzes seines Fernrohrs bringt, §. 4. VI.; stellet das Instrument in der Richtung nach A fest, und verschiebet nun die Alhidade, bis der Gegenstand B in der Mitte des Fadenkreuzes des Fernrohrs sich zeiget, während der Index des Nonii den Punct L auf dem Limbus anspielet.

Nun liegt aber bey der erstern Richtung eine gerade Linie, durch die Indices der Alhidade in der Richtung OD, statt dessen sie in OC liegen sollte; eben so liegt jene Linie, wenn das Fernrohr nach dem Objecte B gerichtet ist, in der Linie DL, statt dessen sie in CL treffen sollte: es mißt daher der Geograph eigentlich den Winkel ODL, statt dessen ihm der Geodolith den Winkel OCL anspricht; er fehlet daher um die Differenz dieser Winkel.

Nun ist aber für die Dreyecke DMO und CML der äußere Winkel

$$OML = ODL + DOC = OCL + DLC; \text{ mithin}$$
$$ODL = OCL + DLC - DOC.$$

Setzt man nun den abgelesenen Winkel $OCL = C$; den Directionswinkel OCG der Excentricität oder $GCO = K$; so ist in dem Dreyeck DCO bekannt die Seite $OC = e$; die Seite $DC = d$; und der eingeschlossene Winkel $DCO = K$; mithin

$$\text{tang } DOC = \frac{D \cdot \text{Sin } K}{e - d \cdot \text{Cos } K}.$$

Eben

Eben so ist auch in dem Dreyeck DCL der Winkel $DCL = C + K$; mithin

$$\text{tang } DLC = \frac{d.\,\text{Sin}\,(C+K)}{\varrho - d.\,\text{Cos}\,(C-K)}.$$

Weil nun diese Winkel immer außerordentlich klein sind; so ist auch ohne merklichen Fehler das wahre Maaß des Winkels, oder

$$ODL = C + d\left(\frac{\text{Sin}\,(C+K)}{\varrho - d.\,\text{Cos}\,(C+K)} - \frac{\text{Sin}\,K}{\varrho - d.\,\text{Cos}\,K}\right) 206264.$$

Da nun das Product d. Cos K im Nonius gegen den Halbmesser (ϱ) immer äußerst klein ist, so kann man auch setzen;

$$ODL = C + \frac{d}{\varrho}.(\text{Sin}(C+K) - \text{Sin}\,K)\,206264; \quad \text{oder}$$

$$ODL = C + \frac{2d}{\varrho}.\text{Cos}\,(\tfrac{1}{2}C+K).\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}C.206264.$$

Für den Geodoliten in (I.) war $\delta = 0{,}00087266$: $\varrho = \frac{2}{3}$ Fuß, und $K = GCO = 30$ Grade. Ist nun der abgelesene Winkel $C = 84°\,''\,36'$; so ist $\frac{1}{2}C + K = 87°\,''\,18'$; und

log 2	=	0,3010300.
log d	=	4,9408474 — 8.
L. Cos $(\frac{1}{2}C+K)$	=	8,6730804 — 10.
L. Sin $\frac{1}{2}C$	=	9,8266307 — 10.
L. 206264	=	5,3144252.
		1,0560137.
log ϱ	=	2,8239087 — 3.
		4,2321050 — 3.
		17,070 Secunden.

Der Geograph würde also mit seinem excentrischen Geodoliten den Winkel um 17,07 Secunden; er würde, wenn die Excentricität 10mal kleiner wäre, denselben um 1,7 Secunden zu groß in sein Manual eintragen.

Zuverlässigkeit der Winkelmessung wegen unspürbarer Excentricität des Geodolithen.

III. Ist nach §. 4. VIII. der Winkel, für welchen der Beobachter in der Stellung des Index des Nonii über einen Theilstrich des Limbi nicht mehr stehen kann, gleich 0,371. Secunden, so kann er auch, nach (I.), die Abweichung der Nonien auf der Theilung an jeder Seite nur auf diesen Winkel sicher bestimmen; es kann sich dabey fügen, daß beide Theile sich gegen einander wechselseitig aufheben, eben so, als beide auf eine Seite fallen können. Der Beobachter kann also in der Beurtheilung des Standes beider Nonien um 0,742 Secunden fehlen.

Gab nun ein Winkel von 40 Secunden eine Excentricität von 0,00087266 Fußen, so giebt dieser Winkel eine derselben von 0,00001629 Fußen. Differirt nun der gemessene Winkel für jene Excentricität um 17,07 Secunden, so wird er für diese um 0,32 Secunden differiren; das ist: der Beobachter wird in der wahren Größe des abgelesenen Winkels, wegen der unvermeidlichen Excentricität seines Winkelmessers, für 0,32 Secunden nicht mehr stehen können.

Die Libellen des Geodolithen.

IV. Eine Libelle bestehet bekanntlich aus einer gläsernen cylinderischen Röhre, welche an beiden Enden in feine Spitzen ausgezogen ist; die nachgehends, wenn die Röhre bis auf eine Luftblase mit rectificirten Weingeist angefüllet ist, hermetisch verschlossen wird; man schließet statt dessen auch die offenen Enden der Röhre mit Kork, oder auch mit eingekütteten Glasscheiben, wenn besonders die Röhre von innen ausgeschliffen ist, wornach sie sich unter der Lampe nicht mehr gehörig behandeln lässet.

Nun

Nun ist aber eine Libelle im Ganzen immer ein Stück einer Curve von sehr großem Krümmungshalbmesser; es suchet deswegen ihre Luftblase nach hydrostatischen Gesetzen immer ihren höchsten Punct zu erreichen, wenn die Röhre flach auf ihrer hohlen Seite im Ganzen, oder auch nur auf Unterlagen oder zweien Puncten A und B aufliegt; sie hat den höchsten Punct auch wirklich erreicht, wenn sie immer an der nemlichen Stelle der erhabenen Seite der Röhre einspielet, sie mag zur Rechten oder Linken auf die Unterlager A und B gelegt werden.

In diesem Zustande nun stehen beide Enden der Luftblase gleichweit von dem Scheitelpunct der Röhre ab, und ihre mit der Wasserfläche congruirende Basis ist mit der Tangente durch den Scheitel parallel, während diese Tangente selbst mit der Zenithal- oder Schwerlinie der Blase einen rechten Winkel macht; das ist: die Waage stehet nun horizontal, und ihre Unterlagen A und B, sind mit der Horitontalebene oder Basis der Luftblase parallel.

Wird eine der Unterlagen gehoben, so verläßt die Luftblase ihre horizontale Stellung, und strebt nun durch ihre hydrostatische bewegende Kraft den höchsten Ort in der Röhre zu ersteigen; und es ist bey sonst übrigen gleichen Umständen ihre bewegende Kraft um so größer, je größer die Masse der Luftblase an und für sich ist; oder sie beweget sich um so leichter, oder sie oscilliret um so besser; oder sie ist um so sensibler.

Diese Oscillation ist ferner für die nemliche Blase und Röhre um so größer, je weniger sich die Blase ihres Orts nach der Krümmung der Röhre spannet, oder je größer der Krümmungshalbmesser der Röhre ist; sie ist noch um so größer, je weniger die innere Rauhigkeit der Röhre ihre Bewegung hindert, und je

gerin-

geringer nach der Weite der Röhre ihre Berührungs-Ebene mit den Wänden derselben ist.

Die Sensibilität der Waage hängt also für eine gegebene Länge und Weite der Röhre, von ihrem Krümmungshalbmesser, von der Größe der Luftblase, und von der innern Politur der Röhre ab; es ist dabey der Erfahrung zufolge die Sensibilität der Waage die beßte, wenn die Röhre fast gerade ist, und die Luftblase die halbe Länge der Röhre hat, bey einer Weite der Röhre von $\frac{1}{12}$ ihrer Länge, bey bester Politur der Röhre von innen.

Uebrigens ist die Länge der Luftblase für die nemliche Waage selbst, sehr veränderlich! Wird nemlich die äußere Luft wärmer als zuvor, so dehnet sich der Weingeist in der Röhre pyrometrisch aus, während auch die Luftblase ein ähnliches Bestreben zeiget, das jenem gerade entgegen wirket: es ziehet sich also unter solchen Umständen, bey einer höhern Temperatur, die Luftblase in soweit in einen engern Raum zusammen, als die pyrometrische ausdehnende Kraft des Weingeistes durch seine Masse, das ähnliche Vermögen der Blase überwuchten kann.

Wird statt dessen die Temperatur der Luft von außen geringer, so ziehen sich der Weingeist und die Blase gleichzeitig zusammen, und sie wird in soweit länger, als der Weingeist sich mehr als die Blase pyrometrisch zusammenziehet.

Krümmungs-Halbmesser der Libelle.

V. Deswegen pflegen die Künstler die Länge der in dem Scheitel der Röhre verharrenden Blase, für verschiedene Temperaturen, auf der Röhre durch Striche oder Einschnitte zu bezeichnen; und es geben diese Marquen ein Mittel ab, den Krümmungshalbmesser der Röhre auf folgende Art zu finden.

Man

Man bedienet sich hierzu zweier Latten (C) und (D), welche an dem einen Ende durch eine Charniere mit einander verbunden sind, während auf der einen Latte D, als der untern, eine Mikrometer-Schraube mit ihrer Spannfeder feste ist, durch welche die obere Latte C um einen beliebigen Winkel elevirt werden kann, dessen Maaß sich nach dem Cadrans oder eingetheilten Scheibe der Schraube ergiebt.

Eine solche Vorrichtung heißt in der Kunstsprache das Legbrett.

Liegt nun die Glasröhre in der durch die Latte C gestossenen Hohlkehle des Legbretts ruhig, und dabey in horizontaler Lage, so spielen die Enden der Blase in den Puncten A und B an, und es ist AC der Krümmungs-Halbmesser der obern gekrümmten innern Seite der Röhre. Fig. (5.)

Wird die Latte C um einen Winkel (k) durch die Mikrometer-Schraube elevirt, so gehet das eine Ende der Blase von B nach D; und der Bogen BD gehört in dem Mittelpuncte C, der als Cirkular gekrümmt angenommenen Röhre, einem Winkel BCD zu, welcher dem Elevationswinkel (k) gleich ist.

Theilet man das Intervall BD in die Länge AB der Blase, so ist diese (m)mal größer; mithin der Winkel

$$ACB = mk = \psi; \text{ und } 2.AC.\sin\tfrac{1}{2}\psi = AB;$$

$$\text{also } AC = \frac{AB}{2\sin\frac{1}{2}\psi} \text{ oder } AC = \frac{AB}{\psi} \text{ beinahe;}$$

weil der Winkel ABC immer nur sehr klein ist.

Bey einer Wasserwaage seye z. E. die Länge der Luftblase 4 Zolle oder $\frac{1}{3}$ Fuß, bey gegebener Temperatur; sie avanciret um eine Linie oder $\frac{1}{12}$ Zoll, wenn das Legbrett um einen Winkel von $11\frac{1}{4}$ Secunden elevirt wird.

Für diese Waage ist also BD = 1 Linie, und K = $11\frac{1}{4}$ Secunden; also m = 48, und $\downarrow$ = 48 . $11\frac{1}{4}$ = 540 Secunden, oder 9 Minuten; mithin

$$AC = \frac{1}{3.0,002618} = 127 \text{ Fuße.}$$

Der Krümmungs-Halbmesser dieser Libelle würde also 127 Fuße seyn; sie macht dabey auf eine Secunde noch einen Ausschlag von $\frac{1}{12.11\frac{1}{4}} = \frac{4}{12.45} = \frac{1}{135}$ eines Zolles; oder $\frac{1}{1620}$ eines Fußes.

Dergleichen Libelle wenden nun die Künstler bey Geodoliten dermaßen an, daß sie dieselbe in einer metallene Röhre eingeschlossen, auf der Alhidade parallel mit der Linie von einem Index zum andern feste machen, und sie dabey parallel mit dem Limbus stellen: sie bringen öfters auch außer diesen, eine andere auf der Alhidade, oder auch neben dem Limbus parallel mit seiner Linie von 90 bis 270 Graden an, wornach beide Libellen übers Kreuz stehen; statt dessen öfters auch letztere Libelle über die Axen des beweglichen Fernrohrs gehangen wird.

Nach den Libellen des Geodoliten, stellet nun der Geograph denselben horizontal, indem er die Schrauben, durch welche der Limbus erhoben und erniedriget werden kann, so lange hin und wieder drehet, bis die beiden Libellen aufs genaueste an ihren Spielpuncten einschlagen, wobey die Luftblase einer jeden mit ihren Enden gleichweit vom Scheitel der Libelle abstehet.

Oefters wird auch nur eine in ihre Kapsel oder Fassung mit Sammet linde eingeschlossene, mit einem Piedestal versehene Libelle auf das Instrument, abwechselnd in der Richtung von 0 bis 180 und von 90 bis 270 so lange aufgesetzt, bis die Blase in jeder Richtung auf ihrem Spielpunct einspielet.

Dieses Verfahren gewähret aber nie die Genauigkeit, mit welcher der Limbus durch fixe Libellen horizontal gestellet werden kann; und man entbehret dabey auch noch des großen Vortheils, daß man während des Operirens selbst, kleine Abweichungen des Limbi, um welche dieser sich außer der Horizontalebene begiebt, nicht so leicht entdecken kann, als dieses bey fixen Libellen angehet; an welchen man auch die geringste Abweichung ihrer Blasen sogleich bemerken, und auf der Stelle corrigiren kann.

Nichts destoweniger aber muß der Geograph immer mit Libellen solcher Art zu seinem Handgebrauch versehen seyn, um sich derselben bey mancherley Veranlassungen bedienen zu können; sie sind für ihn um so brauchbarer, wenn ihre Fassung nicht kürzer ist, als daß er sie gerade noch auf den Limbus seines Instruments auffezzen kann.

Solche Handlibellen sind gewöhnlich in eine messingene Röhre eingeschoben, welche hinten eine Charniere, und vorne einen flachen Vorsprung hat. Ihre Basis ist meistens ein Lineal von Messing, in welchem eine feine Schraube senkrecht, hinten aber ein Support oder Träger feste ist. In letztern greift die Charniere ein, und durch den Vorsprung gehet die Schraube; ein Faden drückt die messingene Röhre von dem Lineal ab, und eine Schrauben-Mutter drückt dagegen auf den Vorsprung, und bringet die Libelle in ihre erforderliche Stellung.

Bey dieser Stellung muß nun die Tangente durch den Vertex der Libelle immer parallel mit der Grundfläche ihres Lineals N seyn! Man erhält dieselbe, indem man die Libelle mit ihrem Lineal auf das Legbrett (A) setzet, und während des wiederholten Umwendens derselben, die Schrauben-Mutter so lange hin

und her drehet, bis die Blase immer auf ihrem justificirten Spielpunct einspielet; es mag die Libelle rechts oder links auf das Legbrett aufgesetzt werden.

Prüfung des Spielpunctes und Standes der Libelle.

VI. Wenn nun auch der Geograph sein Instrument aus den Händen eines Künstlers erhalten hat, auf dessen Kenntnisse, Geschicklichkeit und Fleiß er alles Zutrauen setzen kann, so dienet es nichts destoweniger zu seiner Beruhigung, wenn er seine Libellen durch eigene Ueberzeugung prüfet; da insonders während des Transports sich in ihrer Stellung manches ändern kann!

Eine solche Prüfung setzt aber immer eine gewisse sich durch Uebung eigen gemachte Fertigkeit, in Zerlegung der Bestandtheile des Instruments, und nachmaliger wieder Zusammenfügung derselben voraus, wornach das Ganze seine Stabilität wieder gewinnt, welche es zuvor unter der Hand des Künstlers erhalten hatte. Wer diese Geschicklichkeit sich nicht erworben hat, kann durch die Zerlegung des Instruments mehr verschlimmern als verbessern.

So kommt es nun bey der Prüfung der Libellen zunächst darauf an, daß der Geograph die gläserne Libelle aus ihrer Röhre oder Fassung herausziehet, und ihren Spielpunct zuvörderst gerade so aufsuchet, als ob derselbe von dem Künstler noch nicht bestimmt worden wäre.

Er bringet deswegen die Röhre auf das in (A) angeführte Legbrett, und drehet sie in seiner Hohlkehle central um, indem er dabey genau attendiret, an welcher Seite die Blase sich am geschwindesten beweget.

In dieser Seite als der convexen der Libelle liegt nun auch ihr Spielpunct selbst; diesen zu finden, bezeich-

net

net man die Stellen, an welchen die Enden der Blase anspielen, auf der Röhre von außen mit einem feinen Farbenstrich; verwendet nun die Röhre in der Hohlkehle, so daß sie dabey ganz vorigen Orts zu liegen kommt, und bemerket abermals die Enden der Blase. Treffen diese nun aufs genaueste mit den vorigen zusammen, so spielet die Mitte der Blase unmittelbar selbst in dem Scheitel der Röhre ein, und die untere Seite der Röhre, auf welcher dieselbe in der Hohlkehle liegt, ist parallel mit der Tangente durch ihren Scheitel; oder der Spielpunct der Blase ist aufs genaueste getroffen.

Weichen aber die andern Marquen von den ersten ab, so eleviret oder deprimiret man die obere Seite des Legbretts durch die Mikrometer-Schraube so lange, bis die Blase immer auf der nemlichen Stelle einspielet, man mag sie rechts oder links in der Hohlkehle des obern Bretts auflegen; während das untere Brett feste und unbeweglich verharret. Wornach sodann die Libelle wieder in ihre Fassung gehörig gebracht wird.

Hat sich auf diese Art der Geograph des richtigen Spielpuncts seiner Libelle überzeugt, so kommt es ihm noch darauf an, den Parallelismus derselben mit der Ebene zu prüfen, auf welcher sie feste ist.

Ist diese Ebene die Alhidade des Limbi selbst, so leget man die Alhidade mit der mit ihr durch Stellschrauben verbundenen Libelle auf die obere Seite des Legbretts, und bringet dieses durch die Mikrometerschraube in eine Lage, wornach die Blase an ihrem Spielpunct einspielet.

Man wendet nachgehends die Alhidade um, und siehet nach, ob die Blase wieder genau an der vorigen Stelle anspielet. Ist nun dieses, so ist der Parallelismus zwischen der Alhidade und der Tangente der Libelle hergestellt; oder der Rand der Libelle auf der Alhidade berichtigt.

Ist

Ist aber dieses nicht, und die Blase spielet bei'm Umwenden der Alhidade andern Orts ein, so bringet man das obere Brett vermittelst der Mikrometer-Schraube nach und nach in eine Lage, wobey die Blase immer gleichweit vom Scheitel der Röhre bei'm Umwenden abstehet; und hilft nun durch die eigene Stellschraube der Waage nachgehends derselben so lange nach, bis die Blase immer auf ihrem justificirten Spielpunct einspielet, man mag die Alhidade rechts oder links auf das Legbrett auflegen; in welchen Umständen die Tangente durch den Scheitel der Libelle, parallel mit der hintern Seite der Alhidade ist.

Eben so verfähret man auch mit der andern geprüften Libelle, wenn eine solche über der Alhidade quer stehet, oder mit jener oder deren Verlängerung einen rechten Winkel macht.

Man behandelt eben so auch den Limbus mit seiner Waage, wenn statt dessen die andere Waage, diesem zur Seite angebracht seyn sollte. Auch kann man diese Waage des Limbi, mit seiner Ebene leicht parallel richten, wenn man ihn durch eine Handlibelle horizontal stellet, und nun seine Seitenwaage selbst so lange durch ihre Stellschrauben anziehet, bis ihre Blase genau auf ihrem Spielpunct einspielet.

Sensibilität der Libelle.

VII. Hat nun der Geograph sämmtliche Libellen seines Instruments aufs genaueste geprüft, und ihre Tangenten mit jenen Ebenen parallel gestellt, welchen sie zugehören; so bleibt er doch nichts destoweniger bey jeder immer bis auf einen gewissen kleinen Winkel ungewiß, ob ihr Spielpunct um den Parallelismus seiner Tangente, mit der der Waage angehörigen Ebene mathematisch richtig getroffen worden sey, oder nicht!

Wäre

Wäre die gläserne Röhre genau cylindrisch und dabey ganz gerade, oder ihr Krümmungs-Halbmesser unendlich groß; so würde ihre Blase zu oscilliren beginnen, wenn die Libelle um einen Winkel elevirt würde, wobey die bewegende Kraft der Blase, ihre Adhäsion mit der Wand der Röhre, und den Widerstand überwuchten könnte, welchen die innere Rauhigkeit der Wand, ihrer Bewegung entgegen setzet.

Diese bewegende Kraft der Blase verhält sich aber, wie der Ueberschuß des Gewichts, um welchen das Flüssige an der Stelle der Blase mehr, als diese selbst wieget; sie ist also um so größer, je größer die Blase an und für sich, und je größer das specifische Gewicht des Flüssigen, in Vergleich mit der Luft ist, welche die Blase constituirt.

Ist der Krümmungs-Halbmesser der Libelle sehr kurz, so stemmet sich bey der Elevation der Libelle das Ende der Blase in Fig. 5. an der Wand der Röhre um so mehr, je größer der Winkel MBU ist, welchen eine Tangente MD durch das Element BD der Röhre, mit der Ebene AB der Blase macht, und die Blase oscilliret bey der nemlichen Elevation der Libelle um so schwächer, oder sie macht einen um so kürzern Weg, je größer jener Stoßwinkel MBU für sie ist.

Nun ist aber dieser Winkel MBU für eine cirkularisch gekrümmte Röhre immer dem Winkel MCB, oder dem halben parallactischen Winkel der Blase gleich.

Bezeichnet nun der Buchstabe ψ den parallactischen Winkel der Blase; (a) die bewegende Kraft der Blase; und (f) den Widerstand, welchen die Röhre durch ihre Rauhigkeit, und durch die Adhäsion ihrer bewegenden Kraft entgegen stellet: so verhält sich für gleich lange

und

und gleich weite Röhren, die Aenderung des Standes der Blase, bey einer schwachen Elevation,

wie a : f ♄.

Je bedeutender aber die Blase auch bey der schwächsten Elevation ihren Stand ändert, um so empfindlicher oder sensibler ist die Libelle an und für sich: es verhält sich daher auch die Sensibilität der Blase verkehrt, wie jener Quotient; das ist: die Sensibilitäten gleich langer und gleich weiter Libellen verhalten sich, wie die Quotienten, aus dem Product der parallactischen Winkel ihrer Blasen in den Widerstand ihrer Wände, getheilt durch die bewegende Kräfte ihrer Luftblasen.

Diesen die Sensibilität der Blase constituirenden Winkel, findet daher der Beobachter practisch, in den Winkel, um welchen er das Legbrett durch seine Schraube sanft eleviren kann, ohne daß er eine Aenderung in dem Stand der Blase bemerken kann.

Rücksichtlich dessen aber lehret die Erfahrung, daß dieser Winkel für große Libellen von einigen Fußen, wie sie bey großen Passageinstrumenten gebraucht werden, meistens $\frac{1}{8}$ bis $\frac{1}{10}$ Secunden seye; er ist für Libellen von einem Fuß, wenn sie wie jene gut auspolirt sind, 2 bis 3 mal größer oder $\frac{1}{4}$ bis $\frac{3}{8}$ Secunden; und nimmt so bey übrigen gleichen Umständen mit der abnehmenden Länge der Blase zu.

Libellen von 6 bis 8 Zollen, wenn sie erst mit 4 Secunden einen Ausschlag zu geben beginnen, gehören daher schon unter die schlechtern Sorten.

Einfluß der schiefen Stellung des Geodolithen auf die mit ihm gemessene Winkel.

VIII. Operiret der Geograph mit einem Geodolithen, der eine Kippe hat, §. 4 VI.; so muß er immer die Ebene seines Limbi in die scheinbare Horizontallinie seines Standorts bringen, oder seinen Geodolithen horizontal stellen; weil er mit demselben in jedem Winkel ACB die Neigung der Linien mißt, in welchen zwey seines Orts zusammentreffende Verticalebenen durch die Gegenstände A und B, die Horizontalebene seines Standorts schneiden.

Stehet daher das Instrument schief, so mißt der Geograph nicht jenen Horizontalwinkel; er mißt statt dessen einen andern, in welchem die schiefe Ebene jenen durchschneidet, und mißt deswegen den Winkel um so fehlerhafter, je größer der Winkel ist, unter welchem die schiefe Ebene die Horizontale durchschneidet.

a. Es sey in Fig. (6.) in C der Mittelpunct des Geodolithen, und aCb seine Horizontalebene. Unter dieser aber liegt der Anfangspunct O der Eintheilung des Limbi um den Winkel $aCO = \alpha$ deprimirt; und dagegen der Punct B für 90 Grade um den Winkel $BCb = \beta$ elevirt. Trift nun bey der Aufnahme des Winkels ACB der Index des Nonii in L, so liest der Geograph für ihn den Bogen OBL ab, statt dessen das wahre horizontale Maaß dieses Winkels der Bogen abl ist; er fehlt daher wegen der schiefen Stellung des Instruments in diesem Winkel um OBL — abl; wenn auch beide Gegenstände A und B sich in der verlängerten Ebene des Instruments selbst befinden.

Diesen Fehler nun zu finden, muß zuvörderst die Lage der Linie Cf bestimmt werden, in welcher die Ebene CLBo des Instruments, die Horizontalebene afbl durchschneidet.

Rücksichtlich dessen sey nun der Bogen $Of = x$; $aO = \alpha$; $Bb = \beta$; so ist in den bey (a) und (b) rechtwinklichten Dreyecken afO und bfB

$$\text{Sin } Oa : \text{Sin } afO = \text{Sin } x : 1; \quad \text{Sin } afO = \frac{\text{Sin } \alpha}{\text{Sin } x};$$

$$\text{Sin } Bb : \text{Sin } Bfb = \text{Sin } (90 - x) . 1; \quad \text{Sin } Bfb = \frac{\text{Sin } \beta}{\text{Cos } x};$$

mithin

$$\frac{\text{Sin } \alpha}{\text{Sin } x} = \frac{\text{Sin } \beta}{\text{Cos } x}; \quad \text{Sin } \alpha . \text{Cos } x = \text{Sin } \beta . \text{Sin } x; \quad \text{oder}$$

$$\text{tang } x = \frac{\text{Sin } \alpha}{\text{Sin } \beta}.$$

Nun ist ferner in dem Dreyeck afO; $\text{Sin } Of . \text{Sin } afO = \text{Sin } aO$; setzt man nun den Winkel $afO = \eta$; so ist $\text{Sin } \eta = \text{Sin } \alpha : \text{Sin } x$; oder

$$\text{Sin } \eta = \frac{\text{Sin } \alpha}{\text{tang } x} \cdot \sqrt{(1 + \text{tang } x^2)}$$

$$= \text{Sin } \beta . \sqrt{\left(1 + \frac{\text{Sin } \alpha^2}{\text{Sin } \beta^2}\right)}; \quad \text{oder weil } \eta \text{ immer}$$

nur klein ist, so ist auch

$$\eta = 206264 . \text{Sin } \beta . \sqrt{\left(1 + \frac{\text{Sin } \alpha^2}{\text{Sin } \beta^2}\right)} \text{ in Secunden.}$$

Letztlich ist auch in dem Dreyeck Lfl

$$\text{tang } fl = \text{Cos } Bfb . \text{tang } Lf = \text{Cos } \eta . \text{tang } u.$$

Setzt man den Bogen $fl = u - \Delta u$, wo Δu der kleine Winkel ist, um welchen fl kleiner als fL ist, so ist auch

$$\text{tang } (u - \Delta u) = \text{Cos } \eta . \text{tang } u;$$

$$\text{oder } \frac{\text{tang } u - \text{tang } \Delta u}{1 + \text{tang } u . \text{tang } \Delta u} = \text{Cos } \eta . \text{tang } u;$$

weil nun Δu immer sehr klein ist, so ist auch hieraus

$$\Delta u = \frac{(1 - \text{Cos } \eta) . \text{tang } u}{1 + \text{Cos } \eta . \text{tang}^2 u} = \frac{2 \text{Sin}^2 . \frac{1}{2} \eta . \text{tang } u}{1 + \text{tang } u^2} \text{ beinahe;}$$

mithin auch in Secunden

$$\Delta u = \frac{\eta^2 . \text{tang } u}{2 . \text{Sec } u^2} = \tfrac{1}{2} \eta^2 . \text{tang } u . \text{Cos } u^2$$

$$\text{oder } \Delta u = \tfrac{1}{2} \eta^2 . \text{Sin } u . \text{Cos } u . 206264.$$

Es sey z. E. der Limbus des Instruments in der Richtung CO und BC um $\frac{1}{2}$ Grad außer der Horizontalebene gestanden, als der Beobachter den Winkel OCL genommen, und zu 106°„24′ abgelesen hatte.

Für diesen Fall ist nun einmal $\text{tang}\, x = 1$; mithin $x = 45°$; mithin $u = 106„24 - 45°„0 = 61°„24'$.

Ferner ist für den Winkel „

$$\sqrt{\left(1+\frac{\text{Sin}^2\alpha}{\text{Sin}^2\beta}\right)} = \sqrt{2}. = 1{,}4142;\ \log\sqrt{2} = 0{,}1505150.$$

$\log \text{Sin}\,\beta = 7{,}9408419 - 10.$
$\log\sqrt{2} = 0{,}1505150.$
$\text{l.}206264 = 5{,}3144252.$
$\log \eta = 3{,}4057821.$
$\eta = 2545 = 42'„25''.$
$\log \eta^2 = 0{,}1827138 - 4.$
$\text{l.Sin}\, u = 9{,}9434861 - 10.$
$\text{l.Cos}\, u = 9{,}6800560 - 10.$
$\text{l.}206264 = 5{,}3144252.$
$1{,}1206811.$
$\log 2 = 0{,}3010300.$
$\log \Delta u = 4{,}8196511 - 4.$
$\Delta u = 6{,}6016$ Secunden.

Wenn also der Limbus des Geodolithen mit dem Horizont einen Winkel von 42′„25″ macht, so liest der Beobachter einen Winkel von 106°„24 um 6,6 Secunden fehlerhaft ab.

Wäre der gemessene Winkel kleiner als der Winkel OCf, z. E. nur 30 Grade, so ist hier $u = 45 - 30 = 15$. Grade; und in diesem Falle $\Delta u = 3{,}927$. Secunden.

Wäre der Limbus nur in der Fiducial-Linie CO gegen den Horizont um dem Winkel (α) geneigt, so ist hier $\beta = 0$; mithin $\text{tang}\, x = \frac{\text{Sin}\,\alpha}{0} = \infty$; oder $x = 90$ Grade;

Sin

$\text{Sin } \eta = \frac{\text{Sin } \alpha \,.\, \infty}{\omega}$; oder $\eta = \alpha$, wo sodann der Punct B nun Pol des Bogens O α ist.

b. Liegt das Object B, nach welchem die Vision genommen wird, nicht in der verlängerten Ebene des Limbi des Geodolithen, wie in (a.) vorausgesetzt wurde, so fehlet der Geograph in dem gemessenen Winkel nicht nur um den Winkel Δu, um welchen das schief gestellte Instrument den Winkel zu groß anspricht, sondern er fehlet außerdem auch noch in der Vision selbst um so viel, als diese außer der Bewegungs-Ebene des Fernrohrs sich verfällt.

Denn indeme der Limbus des Instruments in der Linie durch 90 und 270 Grade um den Winkel Bcb$=\beta$ sich erhebt, kommt die Bewegungsebene des Fernrohrs in Fig. (7.) in die schiefe Lage pCe, in welcher sie den Horizont in der Linie Ce schneidet, und die Visierlinie CB nach dem Gegenstande B befindet sich ganz in dieser Ebene.

Leget man durch diese Linie aus dem Puncte C eine andere senkrecht auf den Horizont, so schneidet diese Ebene die schiefe Ebene unter dem Winkel PBp, und den Horizont in der Linie EC, die mit der Ce den Winkel ECe macht.

Unter diesen Umständen mißt der Geograph den Winkel ACB um den Winkel ECe fehlerhaft.

Liegt statt dessen das Object B über der Ebene des Limbi in der Richtung Cb, so liegt diese Linie ganz in der Bewegungsebene des Fernrohrs.

Denkt man sich durch dieselbe aus C eine Vertical-Ebene CPFb, so schneidet diese den Horizont in der Linie CF, die mit Ce den Winkel eCF macht, um welchen der Geograph den Winkel ACB fehlerhaft mißt.

Die-

Diesen Fehler nun zu berechnen, sey in Fig. (7.) der Winkel $PCp = \beta$; die Elevation des Gegenstandes B, oder der Winkel $BCE = \varphi$; auch sey die Linie OC die Fiduciale des Instruments, oder die Linie von o nach 180; und der gemessene Winkel $OCE = C$.

So lange nun der Winkel C kleiner als 90 Grade ist, so ist auch in dem sphärischen Dreyeck PpB der Winkel $pPB = 90 + C$; er ist 180, wenn C ein rechter Winkel ist, wird dagegen der Winkel C größer als 90 Grade, so ist von nun an der Winkel $pPB = 360 - (90 + C)$.

Ferner ist die Seite $BP = 90 - \varphi$; $Pp = \beta$; mithin

$$\text{Sin } Bp : \text{Sin } pPB = \text{Sin } Pp : \text{Sin } PBp.$$

$$\text{Sin } (90 - \varphi) : \text{Sin } (90 + C) = \text{Sin } \beta : \text{Sin } B.$$

$$\text{Sin } B = \frac{\text{Sin } \beta . \text{Cos } C}{\text{Cos } \varphi}.$$

Letztlich ist in dem Dreyeck BEe

auch $\text{Sin } BE \text{ Cotang } Ee = \text{Cotang } B$; oder

$$\text{tang } Ee = \text{Sin } \varphi . \text{tang } B = \frac{\text{Sin } \varphi . \text{Sin } B}{\sqrt{(1 - \text{Sin}^2 . B}}; \text{ oder}$$

$$\text{tang } Ee = \frac{\text{Sin } \varphi . \text{Sin } \beta . \text{Cos } C}{\text{Cos } \varphi . \sqrt{\left(1 - \frac{\text{Sin } \beta^2 . \text{Cos } C^2}{\text{Cos } \varphi^2}\right)}}; \text{ oder in Secunden.}$$

$$Ee = \frac{\text{tang } \varphi . \text{Sin } \beta . \text{Cos } C}{\sqrt{\left(1 - \frac{\text{Sin}^2 \beta . \text{Cos}^2 . C}{\text{Cos}^4 . \varphi}\right)}} . 206264.$$

Ist nun der Winkel $PBp = B$ so klein, daß man seine Tangente mit seinem Sinus verwechseln kann, wie es auch hier immer der Fall ist, so ist auch

$$\text{tang } Ee = \frac{\text{Sin } \varphi . \text{Sin } \beta . \text{Cos } C}{\text{Cos } \varphi} = \text{tang } z; \text{ oder}$$

$$z = \text{tang } \varphi . \text{Sin } \beta . \text{Cos } C . 206264. = eCE.$$

Es sey z. E. der Limbus des Instruments in einer auf seine Direction oder auf die Linie von o bis 180 senkrechten Richtung um einen Winkel $\beta = 30$ Minuten

erha-

erhaben, und der gemessene Winkel C zu 30 Graden abgelesen worden; auch zeige der Höhenkreis des obern Fernrohrs die Elevation des Gegenstandes B zu $\varphi = 2^\circ\,,,\,30'\,,,\,20''$ an; so ist hier

$$\log \text{tang}\ \varphi = 8{,}6406430 - 20.$$
$$\log \text{Sin}\ \beta = 7{,}9408419 - 10.$$
$$\log 206264 = 5{,}3144252.$$
$$19{,}8959101 - 20.$$
$$\log \text{Cos}\ C = 9{,}9375306 - 10.$$
$$\log z = 4{,}9583795 - 5.$$
$$z = 0{,}90861\ \text{Secunden.}$$

Um diese Differenz würde der Winkel C zu groß gemessen, wenn der Gegenstand B um den Winkel φ unter dem Horizonte des Instruments liegt, und dieses in seiner Linie von 90 bis 270 Graden um einen halben Grad über jenen elevirt ist.

Wäre der Winkel C gerade 90 Grade, so ist hier $\text{Cos}\,C = 0$, mithin auch $z = 0$; weil nun die Ebene durch den Gegenstand B in die Ebene von 90 — 270 selbst fällt, in welcher die Bewegungsebene des Rohrs sich befindet.

Ist statt dessen $C = 0$ oder fällt die Linie durch die Indices der Nonien auf der Alhidade in die Fiducial-Linie von 0 bis 180 selbst, so ist hier $\text{Cos}\,C = 1$; und der Geograph fehlt nach der schiefen Stellung seines Instruments um $z = 0{,}78685$ Secunden, in der Richtung nach dem Gegenstande A oder nach den Punctum a quo.

c. Ist der Gegenstand B über den Horizont des Instruments elevirt, so muß sein Fernrohr um den Elevationswinkel niedergedrückt werden, so daß nun seine Axe die Richtung Cb in Fig. (8.), die mit dem Horizonte den Winkel $FCb = \varphi$ macht.

Leget

Leget man durch diese Richtung aus C eine Verticalebene CPEb, so schneidet diese die Bewegungsebene unter dem Winkel pbP; und der Beobachter mißt deswegen den Winkel OCE = C um die Differenz FE zu klein.

Diese Differenz nun zu finden, ist in dem Dreyeck pbP einmal $pb = 90 + Fb = 90 + \varphi$ beinahe; und $Pp = \beta$; mithin $\sin bp : \sin pPb = \sin Pp : \sin pbP$; oder

$$\sin(90+\varphi) : \sin(90+C) = \sin\beta : \sin b.$$

$$\sin b = \frac{\sin\beta . \cos C}{\cos\varphi}.$$

Ferner in dem Dreyeck FbE ist

$$\text{tang} FE. = \sin Fb . \text{tang} b.$$

Da nun der Winkel FbC immer so klein ist, daß seine Tangente von seinem Sinus nicht merklich abweichet, so ist deswegen auch

$$\text{tang} z' = \frac{\sin\varphi . \sin\beta . \cos C}{\cos\varphi}; \text{ oder in Secunden}$$

$$z' = \text{tang}\varphi . \sin\beta . \cos C . 206264,$$

wie in lit. b.

Zuverlässigkeit in der Horizontalstellung des Geodolithen.

IX. Nach (V.) giebt der Geograph seinem Geodolithen die horizontale Stellung durch seine Libellen; er kann daher denselben in der Richtung der Libellen nur bis auf jenen Winkel sicher stellen, welcher der kleinste ist, um welchen sich ihre Blase nach ihrer Sensibilität oder bewegenden Kraft noch ändern kann.

Dieser Winkel aber ist für Libellen, wie sie gewöhnlich auf Geodolithen gebraucht werden, nach ihrer Sensibilität ein bis 2 Secunden, wofür ich hier das Mittel mit $1\frac{1}{2}$ Secunden nehme.

Kann nun der Geograph den Spielpunct seiner Libelle, nur bis auf diesen Winkel sicher bestimmen, so

kann

kann er des Parallelismi seiner Tangente mit der Ebene, auf welcher die Libelle ruhet, nur bis auf diesen Winkel gewiß seyn. Es ist möglich, daß beide sich wechselseitig gegen einander aufheben, mithin durch Zufall der Spielpunct und jener Parallelismus genau mathematisch richtig getroffen sind; aber eben so gut ist es möglich, daß beide auf eine Seite fallen; mithin der Geograph in der Stellung einer Ebene nach seiner Libelle bis auf einen Winkel von 3 Secunden ganz sicher wird.

Bis auf diesen Winkel wird daher auch derselbe seinen Geodolithen in der Richtung von 0 bis 180, und in der diese durchkreuzenden von 90 bis 270 die horizontale Stellung anfänglich geben können.

Nun lehret aber die Erfahrung, daß während des Winkelmessens selbst, die Luftblasen ihre anfängliche Stellung immer etwas verlassen, weil die Nägel der Charniere des Statifs und die Stellschrauben des Instruments selbst, immer einen kleinen Spielraum zulassen: es ändert sich, wo der Geodolith nicht auf einem Statif, sondern statt dessen auf einer steinernen Säule gebraucht wird, §. 4. V., diese selbst durch das Blähen des Bodens; ein einziger hölzerner, aus einem Stamm abgeschnittener und in den Boden geschlagener Strunk, hebt sich eben so durch das Blähen des Bodens, und drehet sich noch außerdem hygrometrisch in seinen Fasern, so daß der Erfahrung zufolge, dieses hygrometrische Wenden des Klotzes von Morgens bis Abends an heitern Tagen das Instrument um $\frac{1}{2}$ Minute verrücken kann. Mehrere neben einander geschlagene Klötze, auf deren abgeglätteten Stirn das Instrument gesetzt wird, zeigen dieses Drehen nicht, aber es neiget sich wie bey der steinernen Säule, das Ganze auf die von der Sonne abgewendete Seite, so wie der Boden sich erhitzet.

Bey Winkelmessungen auf Thürmen, erleidet das auf seiner Platte in ihrem Gesimms gestützte Instrument, die schwachen Schwankungen, welchen der Thurm selbst durch das Blähen des Bodens nach dem Stand der Sonne, oder auch durch einen schwachen Wind, ja selbst durch den Schwung des Perpendikels der Schlaguhr annimmt.

Bey so bewandten Umständen bleibt daher der Geograph, wenn er sein Instrument auf einer steinernen Säule unter einem Signal aufgestellt hat, §. 4. IV., in dem horizontalen Stande seines Geodolithen meistens nur auf 4 Secunden, auf Thürmen aber auf 4 bis 6 Secunden sicher.

Setzt man nun in der Formel (VIII.), $\alpha = \beta = 4$ Secunden, oder 450mal kleiner, als sie dort angenommen wurden, so wird man sich überzeugen, daß eine so kleine Abweichung des Instruments von seinem horizontalen Stande, weder auf das Ablesen des gemessenen Winkels (VIII. a.), noch auf die genommene Visionen selbst (VIII. b. c.), einen merklichen Einfluß haben können: oder die hieraus auf das Winkelmessen entstehende Fehler sind verschwindend.

Abweichung des Fadenkreuzes in dem Fernrohr von seiner Verticale.

X. Denkt man sich eine lothrechte Linie BC Fig. (9.) durch den Durchschnittspunct des Fadenkreuzes eines Fernrohrs, §. 4. VIII. g. ACF, so muß diese das Fadenkreuz genau bisectiren, wenn seine Stellung in dem Fernrohr richtig seyn solle, und eine gerade Linie durch den Durchschnittspunct der Fäden, und durch die Mitte des Objectivs ist die Visierlinie des Fernrohrs.

Diese fällt zugleich in die Axe des Rohrs selbst, wenn jener Durchschnittspunct seine Lage nicht ändert,

indem das Rohr um seine Axe gedrehet wird; oder das Fadenkreuz ist in diesem Fall centrirt.

Macht statt dessen der Faden AC mit der Verticale BC den Winkel ACB, der Faden CF aber den Winkel BCF, und der Geograph richtet das Instrument nach einem Gegenstande A, den er nach den Umständen §. 4. VIII. am füglichsten in der Linie CH überschneidet, so trägt er darauf an, sein Bild in die Mitte der Linie GH oder in E zwischen das Fadenkreuz zu stellen.

a) Nimmt er eine Vision nach einem andern Gegenstande B, den er auf der Linie AF nach der Breite seines Bildes anschneidet, so bringt er dasselbe in D, als der Mitte von AF. Stünde nun das Fadenkreuz genau senkrecht, so würden die Puncte E„D genau in die Verticale selbst fallen, statt dessen sie bey dem schiefen Stand des Fadenkreuzes um KD von einander abweichen. Ist nun der Abstand des Kreuzes von dem Objectivglas = d, so fehlet der Geograph in dem Winkel der Gegenstände A und B, um die Differenz $\frac{DK}{D}$. 206264. Secunden. = Δ.

Setzt man nun den Winkel, unter welchem sich die Fäden schneiden, oder ACF = φ, und den Winkel, welchen der eine Faden AC mit der Verticale BC macht, oder ACP = ω, so ist einmal BAC = 90 — ω; AFC = 180 — (φ + 90 — ω) = 90 — (φ — ω).

Auch ist Sin AFC : AC = Sin ACF; AF; also AF = AC . Sin φ : Sin (90 — (φ — ω));

$$\text{oder } \tfrac{1}{2}AF = \frac{AC \cdot \sin\varphi}{2\cos(\varphi-\omega)}. = AD;$$

$$\text{eben so } GE = \frac{GC \cdot \sin\varphi}{2\cos(\varphi-\omega)}.$$

Diese Linien aber sind bey einer (m)maligen Vergrößerung des Fernrohrs auch (m)mal kleiner, als sie scheinen; es ist daher auch der Fehler, welchen die schie-

schiefe Stellung des Fadenkreuzes in den Winkel bringt,

$$\frac{AC-GC}{m} \cdot \frac{\text{Sin } \varphi}{2d.\text{Cos}(\varphi-\omega)} \cdot 206264 \text{ in Secunden.}$$

Es erachte z. E. der Beobachter die Linie AC zu 3 und GE zu 2 Linien in einem Fernrohr von 32maliger Vergrößerung, und einer Focallänge des Objectivs von 16 Zollen oder 192 Linien.

Auch durchkreuzen sich die Fäden seines Fadenkreuzes unter einem Winkel von 45 Graden, und das Kreuz stehe um 5 Grade außer der Verticale seines Durchschnittspuncts.

Hier ist also AC — GC = 1. Linie; d = 192. Linien; m = 32; φ = 45; ω = 5 Grade.

log Sin 45 = 9,8494850—10.	log d = 2,2833012.
log 206264 = 5,3144252.	l. Cos 40 = 9,9375306—10.
5,1639102.	log 2 = 0,3010300.
4,0270118.	2,5218618.
4,1368984—3.	log m = 1,5051500.
13,706 Secund.	4,0270118.

Bey dieser schiefen Stellung des Fadenkreuzes würde also der Geograph um so viele Secunden in einem Winkel nach Gegenständen A und B fehlen können, die er nach der Breite ihrer Bilder dermassen überschneiden muß, daß der Abstand der Sehnen vom Durchschnittspunct des Fadenkreuzes, scheinbar um eine Linie differiret; er würde in dem Winkel bey dem schiefen Stand des Fadenkreuzes gar keinen Fehler begehen, wenn er die Bilder beider Gegenstände mit der nemlichen Stelle des Fadens, oder mit der nemlichen Sehne hätte überschneiden können.

b) Eben so verhält sichs auch, wenn die Fäden des Fadenkreuzes sich rechtwinklicht durchschneiden, und der

Faden, welcher senkrecht stehen sollte, um den Winkel (ω) von dieser Richtung abweichet.

Setzt man hier AC = α; GC = β; so ist jener Fehler im Visieren in Secunden

$$\frac{(\alpha - \beta) \cdot \text{tang } \omega}{m \cdot d} \cdot 206264.$$

Es ist daher immer äußerst nothwendig; daß der Geograph die Stellung seines Fadenkreuzes im Fernrohr vorerst prüfet, ehe er seine Operationen mit demselben beginnet.

Er richtet nemlich dasselbe bey horizontalem Stand des Instruments nach einem senkrechten Streifen, dessen Bild die größte Sehne seines Fadenkreuzes überspannet, und siehet zu, ob das Bild von jedem Faden oben und unten in gleichweit vom Durchschnittspunct abstehenden Sehnen, auch gleichweit abstehet. Ist dieses, so ist die Stellung des Fadenkreuzes richtig: ist dieses aber nicht, so drehet er die Ocularröhre so lange herum, bis dieser Umstand eintritt; er ziehet nun auf der Ocularröhre eine gerade Linie parallel mit seiner Axe, und macht an der Röhre des Fernrohrs selbst eine Marque: damit er die Ocularröhre nachgehends immer in der Richtung heraus uud hinein schieben kann, in welcher der auf ihr gezogene Strich die Marque genau schneidet.

Rücksichtlich dessen pflegen auch die Künstler in die Röhre einen Schlitz auszuschneiden, in welchem ein in die Ocularröhre fest gemachtes Zäpfchen, bei'm Aus- und Einziehen derselben, verschoben wird, wornach die Ocularröhre sich nicht drehen kann.

Sollte sich während des Transports die Röhre, welche das Fadenkreuz in sich faßt, und als solche mit diesem in die Ocularröhre eingeschoben ist, in derselben drehen, so daß das Fadenkreuz seine senkrechte Stellung verlohren hat, so richtet der Geograph dieselbe durchs

Um-

Umdrehen nach jenen vertical stehenden oder hängenden Streifen wieder ein, und marquirt den richtigen Stand dieser Röhre in der Ocularröhre.

Uebrigens haben diese meistens aus Spinnenfäden construirte Kreuze das Eigene, daß sie sich hygrometrisch auffallend ändern; sie spannen sich in trockner Luft an, und lassen in sehr feuchter Luft öfters in soweit nach, daß sie fast ihre gerade Richtung verliehren, und bogenartig sich verwerfen.

Abweichung der Visierlinie des Fernrohrs von dem Fiduciale des Instruments.

XI. Denkt man sich über dem horizontal gestellten Geodolithen eine Verticalebene, welche ihn in seiner Fiduciallinie, oder in der Linie von o bis 180 schneidet, so befindet sich in dieser Ebene auch die o Linie seiner Alhidade, oder die auf derselben durch die Anfangspuncte oder Indices seiner Nonien gehende Linien, wenn das Instrument nicht excentrisch ist: es befindet sich in ihr auch die Visierlinie seines obern Fernrohrs, wenn seine Verticalbewegungsebene nach seiner Aufstellung auf der Alhidade genau in diese trift.

a. Nun sey aber in Fig. (14.) CF die Fiduciale des Instruments, mit welcher die Centrale der Nonien der Alhidade aufs genaueste zusammen trift, während eine Verticale durch die Visierlinie des obern Fernrohrs die Alhidade in der Linie AH schneidet.

Fället man aus dem Mittelpunct C des Instruments einen Perpendikel auf diese, so trift dieser die Linie AH in dem Puncte γ, und eine Parallele γf mit FC macht mit der Visierlinie des Fernrohrs den Abweichungswinkel $A\gamma f = \psi$.

Will nun der Geograph mit diesem Instrument den Winkel ACB messen, so lässet er die Indices beider Nonien auf der Fiduciale CF einspielen, drehet nun das Instrument, bis die Visierlinie seines Fernrohr nach A in die Richtung AH fällt; er drehet nachgehends die Alhidade auf dem fest gestellten Limbus, bis er den Gegenstand B in der Mitte seines Fadenkreuzes siehet, oder dessen Visierlinie die Richtung CE hat.

Unter diesen Umständen beschreibet der Index jedes Nonii den Winkel FCE, statt dessen die Verticalebenen durch C nach A und B sich unter dem Winkel AγB schneiden.

Wäre nun der Winkel Aγf = ECe = ψ = o; oder stünde die Visierlinie des Fernrohrs parallel mit der Centralen FC der Alhidade, so würde das Instrument in der Richtung nach dem A um einen Winkel (α) falliren, unter welchem in A der Perpendikel Cγ gesehen wird; es fallirt aber wegen des Abweichungswinkels ψ um $\alpha+\psi$; oder es spricht die anfängliche Richtung oder das punctum a quo um $\alpha+\psi$ zu klein an.

Bezeichnet ferner (β) den Winkel, unter welchem der Perpendikel Cγ = Ch in B gesehen wird, so trift die Centrallinie der Nonien in CE, während die Visierlinie nach B in Bh trift; die beide um den Winkel ($\beta+\psi$) von einander abweichen, um welchen hier der Index weiter verschoben oder der Winkel zu groß gemessen wird.

Ist nun der auf dem Limbus = C, so ist deswegen das wahre Maaß des Winkels

$$ACB = C+\alpha+\psi-(\beta+\psi) = C+\alpha-\beta;$$

mithin der Fehler in dem Winkel gleich ($\alpha-\beta$) Secunden.

Der Winkel, welchen die Visierlinie des Fernrohrs mit der Centralen der Nonien macht, bleibt daher bei'm Winkelmessen außer Einfluß; nur der Perpendikel, um wel-

welchen die Verticalebene der Visierlinie von der Verticale durch die Centrallinie der Nonien abstehet, kommt in Betracht, und veranlasset in dem gemessenen Winkel immer einen obwohl nur kleinen, und meistens verschwindenden Fehler.

Ist nemlich der Perpendikel $C\gamma = d$, der Abstand des Objects A und B von dem Mittelpuncte C des Instruments, gleich a, b, so ist in Secunden

$$fCF = \alpha = \frac{d}{a} . 206264; \text{ und } \beta = \frac{d}{b} . 206264;$$

mithin der Fehler in dem gemessenen Winkel

$$\frac{d.}{ab} (b-a) . 206264 \text{ Secunden.}$$

Es sey z. E. $d = 1$ Zoll, oder $\frac{1}{12}$ Fuß; $a = 12000$; $b = 20000$ Fuße; so ist der Fehler

$$\frac{8000 . 206264}{12 . 12000 . 20000} = 0,573 \text{ Secunden;}$$

es ist der Fehler $= 0$, wenn $b = a$ oder beide Objecte gleichen Abstand vom Mittelpuncte haben.

b. Befindet sich die Bewegungsebene des untern Fernrohrs des Instruments ganz in der Verticale durch seine Fiduciale, oder durch die Linie 0 und 180, so zeiget sich der nemliche entfernte Gegenstand A, in dem obern und untern Fernrohr mitten zwischen ihren senkrecht gestellten Fadenkreuzen (X.); es weichen statt dessen beide Visionen von einander um einen Winkel (λ) ab, unter welchem sich in A ein Perpendikel am Mittelpunct nach der Visierlinie des untern Rohrs darstellet (a).

Da nun dieser Winkel sich nach dem Abstand des Gegenstandes A von dem Instrument richtet, so kann dasselbe für das Repetiren der Winkel, §. 4. VI. nicht gebraucht werden; und es entbehret dadurch dasselbe eine seiner wesentlichsten Eigenschaften. Denn es vertritt in diesem Falle das Fernrohr nur die Stelle eines Ver-

sicher-

sicherungsrohrs, indem es anzeigt, ob das Instrument sich nicht verrückt habe, während man den einfachen Winkel mit ihm genommen hat.

c. Soll ein Fernrohr centrirt (a.) werden können, so muß sein Objectivglas in seiner Fassung sich durch 4 Stellschrauben verschieben lassen.

Man richtet das auf Supporten liegende Fernrohr nach einem entfernten senkrecht stehenden Kreuz, und verschiebet durch jene Schrauben das Objectiv so lange, bis die Mitte des Kreuzes immer von dem Durchschnittspunct seiner Fäden aufs genaueste geschnitten wird, während man das Fernrohr auf seinen Supporten beliebig umdrehet.

Prüfung der Bewegungs-Ebene der Fernröhre des Geodolithen.

XII. Treffen die Bewegungsebenen des obern und untern Fernrohrs eines Geodolithen aufs genaueste in die durch seine Fiduciale senkrecht auf die Ebene seines Limbi gedachte Verticalebene, so verändert der Index des Nonii bey der Aufnahme eines Winkels ACB seinen Stand immer um einen Winkel, der jenem gleich ist, welchen zwey Verticalebenen aus dem Centro des horizontal stehenden Instruments nach den Gegenständen A und B, an seiner Stelle mit einander machen: auch ist in diesen Umständen die Bewegungsaxe jedes Fernrohrs mit der Ebene des Limbi parallel.

Gehet das Fernrohr in einer sogenannten Charniere, oder Zwinge, so ist die Axe desselben ein Kopfnagel, welcher durch eine an ihm angebrachte Schraubenmutter die Charniere sanft drücket, so daß sich das Fernrohr in seiner Bewegungsebene satt auf und nieder bewegen lässet.

Statt.

Statt dessen aber befindet sich das Fernrohr auch an einer Spindel, die an ihren Enden auf Supports sich drehet, welche auf der Alhidade feste aufgeschraubt sind.

Macht nun die Axe des Nagels, oder auch die Axe jener Spindel einen Winkel mit der Ebene des Limbi, so ist die Bewegungsebene der Visierlinie des Fernrohrs auf diese Ebene nicht vertical, und der Geograph begehet dadurch in der Winkelmessung die in (VII.) betrachteten Fehler.

a. Diese nun zu vermeiden, kommt daher dem Geographen alles darauf an, die Bewegungsebene der beiden Fernröhre seines Instruments zu prüfen, ehe er dasselbe gebraucht; er prüfet dieselbe auch öfters, während des Triangulirens, weil durch den Transport des Instruments die Bewegungsaxen der Fernröhre falliren können.

Diese Prüfung geschiehet bey Fernröhren, die in einer Charniere beweglich sind, folgendermaßen am füglichsten.

Es stellet der Geograph sein Instrument im Ganzen, insbesondere aber in der Richtung von 90 bis 270 mit einer Libelle (VII.) aufs genaueste horizontal; visieret nun mit dem Fernrohr nach einem Faden, der in seiner lothrechten Richtung durch ein Gewicht angespannt wird, und verfolget so mit dem Fadenkreuz des Fernrohrs den Faden von oben bis unten. Bleibt dabey von der größten Elevation des Rohrs bis zu seiner größten Depression oder Inclination, der Faden immer in der Mitte des senkrecht stehenden Fadenkreuzes (X.), so beweget sich die Visierlinie desselben augenscheinlich in einer auf den Limbus des Instruments verticalen Ebene.

Dabey ist es räthlich, das Gewicht in ein Gefäß mit Wasser reichen zu lassen, damit der Faden durch eine

schwa-

schwache Bewegung der Luft nicht so leicht afficirt wird; auch muß man die Prüfung selbst nur alsdann anfangen, wenn der Faden sich ganz aufgedrehet hat, und nun mit seinem Gewicht im Wasser stille stehet: es ist diese Prüfung um so zweckmäßiger, je mehr man nach der Länge des Fadens, das Fernrohr eleviren und incliniren muß, und je deutlicher der Faden nach seinem Abstand im Fernrohr gesehen wird.

Eben so wird auch der Gang des unter dem Instrument angebrachten Fernrohrs geprüft; weil dieses, wo nicht in einer Charniere, doch meistens in Supports beweglich ist, die sich einander nahe sind.

Sollte nun der Faden bey dieser Prüfung die Mitte des Rohrs an einer gewissen Stelle anfangen zu verlassen, und sich aus derselben immer mehr entfernen, je stärker man das Rohr elevirt oder incliniret, so hilft der Geograph dem Charniere selbst mit einer Vorrichtung nach, durch welche diese auf der Alhidade selbst lothrecht gerichtet wird, bis der Faden die Mitte des Fadenkreuzes in jeder Stellung schneidet; und stellt nun die Charniere selbst so feste als es angehet.

b. Wenn aber auch der Geograph sich überzeugt hält, daß bey diesem Versuch das Bild des aufgehängten Fadens die Mitte seines Fadenkreuzes nie verläßt, so bleibt er nichts destoweniger in der Lage der Bewegungsebene seines Fernrohrs nicht mathematisch richtig gewiß; er kann statt dessen jener Lage immer nur bis auf einen gewissen kleinen Winkel sicher seyn, welcher die Zuverlässigkeit jener Bestimmung angiebt.

Dieser Winkel der Zuverlässigkeit hängt aber ab, einmal von der Genauigkeit, mit welcher er den Limbus seines Instruments mit seiner Libelle horizontal stellen kann (VII.), und außerdem noch von dem Winkel, um welchen

er

er nach seinem Augenmaaß sich überzeugen kann, daß der Faden auch immer in der Mitte des Fadenkreuzes wirklich stehet, wenn er glaubt, ihn mitten inne zu sehen. §. 4. VII.

Es bezeichne ψ jenen und φ diesen Winkel; auch sey $a = AC$ Fig. (10.) der horizontale Abstand des Fadens von dem Auge, und (α) der größte Elevations- und (β) der größte Tiefenwinkel, auf welchem sich sein Fernrohr wenden läßt.

Nun ist einmal die Höhe des höchsten und tiefsten Puncts, welchen das Fernrohr am Faden noch erreichen kann, $AB = a.\text{tang}\,\alpha$ und $AE = a.\text{tang}\,\beta$, und der Abstand dieser Puncte von dem Auge gleich $BC = a : \text{Cos}\,\alpha$, und $a : \text{Cos}\,\beta = EC$; mithin der Theil, um welchen das Auge sich in dem Stand des Fadens in der Mitte des Kreuzes nach seinem Augenmaaß verfehlen kann, oben $DB = \frac{a.\text{tang}\,\varphi}{\text{Cos}\,\alpha}$, und $\frac{a.\text{tang}\,\varphi}{\text{Cos}\,\beta} = CF$; und es kann einer von diesen Theilen in dem unglücklichsten Fall zur Rechten, der andere zur Linken fallen.

Ziehet man nun von D nach F eine gerade Linie, so ist der Winkel $DgB = CgF$ jener, für welchen das Auge nach seinem Augenmaaß rücksichtlich der Lage der Bewegungsebene des Fernrohrs gegen die Verticalebene nicht stehen kann.

Setzt man $Bg = x$, so ist die Tangente dieses Winkels

$$\frac{DB}{Bg} = \frac{EF}{Eg} \text{ oder } \frac{DB}{x} = \frac{EF}{EB\text{-}x}; \text{ mithin}$$

$$x = \frac{EB.DB}{EF+DB.} \text{ und}$$

$$\text{tang}\,EgF = \frac{DB}{EB.DB:CF+DB} = \frac{EF+DB}{EB}; \text{ oder in}$$

tang

$$\text{tang EgF} = \frac{\text{a.tang}\varphi.\left(\frac{1}{\text{Cos}\beta} + \frac{1}{\text{Cos}\alpha}\right)}{\text{a.(tang}\alpha + \text{tang}\beta)}$$

$$= \frac{\text{a.tang}\varphi.(\text{Cos}\alpha + \text{Cos}\beta)}{\frac{\text{a.Sin}(\alpha+\beta)\ \text{Cos}\alpha\text{Cos}\beta}{\text{Cos}\alpha\text{Cos}\beta}} \quad ; \text{ oder}$$

$$\text{EgF} = \frac{2.\text{Cos}\frac{1}{2}(\alpha+\beta).\text{Cos}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\text{Sin}(\alpha+\beta)}.\varphi.206264 \text{ Sec.}$$

Nimmt man für den Geodolithen in §. 4. VIII. d.; den Winkel $\varphi = 1$. Secunde, und setzt $\alpha = 45$; $\beta = 15$ Grade; so ist $\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = 30$; $\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = 15$ Grade; mithin

$$\log \varphi = 4,6855749 - 10.$$
$$\log \text{Cos}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = 9,9375306 - 10.$$
$$\log \text{Cos}\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = 9,9849438 - 10.$$
$$\log 206264 = 5,3144252.$$
$$\log 2 = 0,3010300.$$

$$10,2235045 - 10.$$
$$\log \text{Sin}(\alpha+\beta) = 9,9375706.$$

$$4,2859739 - 4.$$
$$\text{CgF} = 1,9363 \text{ Secunden.}$$

Der größte Fehler, welchen der Geograph in der Lage der Bewegungsebene seines Fernrohrs gegen die Verticalebene seiner Visierlinie bey solchen Versuchen, einzig durch sein Augenmaaß begehen kann, wäre also in dem unglücklichsten Falle noch nicht 2 Secunden; er würde dagegen in dem glücklichsten Falle, wo sich ein Fehler des Augenmaaßes gegen den andern aufhebt, oder die Theile DB„EF auf eine Seite fallen, nur um einen Winkel ungewiß bleiben, dessen Tangente $\frac{\text{DB} - \text{CF}}{\text{BE}}$ ist.

Wenn nun aber der Geograph nach seinem Augenmaaß den Gang des Fadens zwischen dem Fadenkreuz sei-

seines Fernrohrs ganz sicher beurtheilen, oder in demselben um gar nichts fehlen könnte, so kann er doch bey diesen Versuchen die Ebene seines Limbi nicht genauer horizontal stellen, als die Zuverlässigkeit seiner Libelle mit sich bringt (VII.). Kommt diese z. E. einem Winkel von $\frac{1}{2}$ Secunde zu, so kann die Bewegungsebene der Visierlinie seines Fernrohres um diesen Winkel von der Verticalen weichen, wenn er glaubt, daß der aufgehängte Faden sein Fadenkreuz immer mitten durchschneidet.

Aus diesen Betrachtungen ergiebt sich nun immer so viel, daß der Geograph bey Untersuchung des Ganges seines Fernrohrs, rücksichtlich des horizontalen Standes seines Instruments, und seines Augenmaaßes höchstens bis auf einen Winkel von $\frac{1}{2}$, und wenigstens bis auf 3 Secunden sicher seyn könne.

Substituiret man diesen Winkel in den (β) der Formel (VIII. b.), so ist der Fehler, welchen der Geograph beim Winkelmessen dadurch begehet, daß er nicht weiß ob die Bewegungsebene seines Fernrohrs wirklich vertical ist, oder von der Verticale um 3 Secunden abweichet, auch $\frac{30.60}{3}$ oder 600 mal kleiner als dort, oder $\frac{1}{600} \cdot \frac{9}{10}$ oder $\frac{9}{6000}$ einer Secunde; das ist: der Geograph kann den Gang der Bewegungsebene seines Fernrohrs durch den angeführten Versuch so genau bestimmen, daß der Theil, um welchen er dabey ungewiß bleibt, keinen stärkern Einfluß auf die Winkelmessung hat.

c. Befindet sich das Fernrohr über der Alhidade an einer Spindel feste, die sich in Sätteln zweier auf der Alhidade festen Supports horizontal drehet (a.), so kann der Geograph den Gang desselben nach (b.) durch den aufgehängten Faden prüfen.

Da aber bey dieser Construction eines Geodolithen an der Spindel meistens eine Libelle gerade so wie bey den

den Passage-Instrumenten in ihren Armen hängt, so bedienet sich der Geograph derselben für die Prüfung der Bewegungsebene seines Fernrohrs folgendermaßen.

Er untersuchet nemlich vorerst, ob die Tangente durch den Spielpunct der Luftblase der Libelle, aufs genaueste parallel mit den Stellen der Spindel seye, welche auf den Sätteln der beiden Supports unmittelbar ruhen!

In dieser Absicht hebt er die Spindel mit ihrem Fernrohr und Libelle aus den Sätteln der beiden Supports aus, leget sie auf feste Unterlagen A „ B, und siehet nach, ob die Blase auf ihrem Spielpunct einspielet, und bemerket sich den Stand der Blase auf dem Glase. Nun wendet er die Spindel so, daß nun der Zapfen, welcher zuvor auf A lag, auf B zu liegen kommt, und bemerkt abermals den Stand der Blase.

Spielt nun diese aufs genaueste auf der vorigen Stelle ein, so ist die Tangente durch den Spielpunct der Blase genau parallel mit den Stellen der Zapfen der Spindel, in welchen sie auf den Supports der Alhidade aufliegen: ist dieß aber nicht, so drehet der Geograph die an den einen Arm der Libelle angebrachte Schraube so lange, bis die Blase immer auf ihren Spielraum einspielet, so oft man die Spindel auf den Stützen A „ B beliebig verwechselt.

Hat sich nun der Geograph von dem Parallelismus der Libelle mit der Spindel des Fernrohrs überzeugt, so hat er noch zu untersuchen, ob die Sättel der beiden Supports der Alhidade, auch mit der Ebene des Limbi parallel sind?

Er stellet deswegen den Limbus seines Instruments durch eine Libelle aufs genaueste horizontal, legt nun die Spindel wieder auf ihre Sättel, bemerket den Stand der Blase an ihren Extremitäten; verwendet die Spindel auf diesen Sätteln, und bemerket abermals den Stand der Blase.

Behauptet nun die Blase bey jedem Verwenden der Spindel immer den nemlichen Stand, so sind die Sättel der Supports parallel mit der Ebene des Limbi; verändert statt dessen die Blase ihren Stand, so hilft der Geograph mit den Stellschrauben der Sättel so lange nach, bis die Blase bey jeder Verwendung immer in den nemlichen Puncten einspielet.

Hat nun der Geograph sich aller dieser Dinge aufs sorgfältigste versichert, so bleibt er nichts destoweniger doch nur bis auf einen gewissen Winkel gewiß, ob die Bewegungsebene seines Fernrohrs auch senkrecht auf die Ebene des Limbi seines Instruments seye?

Da er nemlich den Spielpunct seiner Libelle, so wie den Parallelismus seiner Tangente mit der Spindel, und der Sättel der Supports mit der Ebene des Limbi, nur bis auf den die Sensibilität der Waage constituirenden Winkel sicher bestimmen kann, so ist der größte Fehler, welchen er in dem unglücklichsten Falle in Bestimmung der Lage der Bewegungsebene seines Fernrohrs begehen kann, $\frac{3}{2}$ Secunden, wenn die Sensibilität seiner Libelle $\frac{1}{2}$ Secunde ist: er kann im glücklichsten Fall, wenn sich ein Fehler immer gegen den andern aufhebt, jener Lage bis auf $\frac{1}{2}$ Secunde gewiß werden, um welche er bey Prüfung ihres Spielpuncts ungewiß bleibt.

Vergleicht man diese Zuverlässigkeit der Bestimmung der Bewegungsebene des Fernrohrs mit der in (b.) durch den Faden; so ist diese zu jener wie $\frac{3}{2} : 3$, oder sie ist noch einmal so groß wie diese.

d. Sind die Zapfen der Spindel des Fernrohrs, wo sie auf den Sätteln oder Anwellen der Supports aufliegen, vollkommen, oder mathematisch rund, so wird die Blase der Libelle ihren Stand nicht ändern oder verlassen, wenn man das Fernrohr um jeden Winkel elevirt oder inclinirt.

Sind

Sind aber statt dessen jene Zapfen in etwas oval, so wird die Blase oscilliren, so wie man das Fernrohr außer der horizontalen Lage bringt. Wo nun dieses bey einer Libelle statt findet, muß der Geograph bei'm Winkelmessen den Limbus durch seine Stellschrauben in soweit außer der horizontalen Lage bringen, bis die Waage ihren Spielpunct wieder findet, wenn er die Bewegungsebene des Rohrs selbst bis auf den immer kleinen Variationswinkel genau vertical stellen will.

Uebrigens ist es sehr dienlich, wenn das Fernrohr auf der Alhidade noch bis auf einen Winkel elevirt werden kann, der größer als die größte Polhöhe des nördlichsten Orts im Staate ist, welcher mit den Geodolithen aufgenommen werden solle; damit man mit demselben auch Beobachtungen mit dem Polarstern anstellen, und durch dieselbe Azymuthe bestimmen kann.

Abweichung der Fiduciale des Höhenkreises von der Visierlinie seines Fernrohrs.

XIII. Bey Geodäliten, die als solche auf der Alhidade ein Fernrohr mit der Kippe haben, wird öfters auch ein Höhenkreis angebracht, mit welchem der Geograph die Elevationen und Depressionen oder Inclinationen der entfernten Gegenstände mißt, um nach Umständen von denselben gewißen Gebrauch machen zu können.

Es machen deswegen die Künstler an dem auf der Alhidade beweglichen Fernrohr einen Halbkreis, oder auch nur einen Sector desselben feste, der in seine Grade und Theile derselben eingetheilt ist; es mißt dabey diese Vorrichtung als Höhenmesser, die Elevations- und Depressions-Winkel entweder durch einen aus dem Mittelpunct der Theilung frey herab hängenden Senkel;

kel; oder es streifet statt dessen auch der Sector einen Nonius an, welcher seines Ortes feste ist, und Theile des Grades anspricht.

Es sey nun der Höhenmesser auf die eine oder auf die andere Art construirt, so kommt bey ihm immer alles darauf an, daß eine gerade Linie durch seinen Mittelpunct, und durch den o- oder Anfangspunct seiner Theilung, von welchem aus die Theilung zur Rechten und Linken fortgehet, mit der Visierlinie des Fernrohrs genau einen rechten Winkel macht.

Will nun der Geograph sich nicht auf die Bestimmungen des Künstlers bey seinem Höhenmesser verlassen, so muß er jenen Winkel selbst prüfen, oder verificiren; wozu folgendes Verfahren am dienlichsten ist.

Er stellet sein Instrument in der obern Etage eines Gebäudes horizontal, nachdem er zuvor den (o) Punct des Höhenkreises auf den Index seines Nonii gestellet hat; drehet das Instrument nach einem gegenüber stehenden Gebäude, an welchem er in die Richtung der Visierlinie oH in Fig. (11.) einen Strich machen, und von diesem aus in gleichem Abstand von H zwey andere Striche in B und A machen lässet.

Eleviret er nun sein Fernrohr nach dem Strich B, so zeiget der Nonius auf dem Höhenmesser den Winkel ECD; incliniret er aber das Fernrohr nach dem Strich A, so zeiget der Nonius den Winkel DCF; sind nun beide Winkel einander gleich oder DCF = ECD, so macht die (o) Linie CD des Höhenmessers mit der Visierlinie oH den rechten Winkel; ist dieß aber nicht, so wird der Index des Nonii um $\frac{1}{2}$ (DCF — ECD) verschoben, und in dieser Stellung auf seinem Aufsatz fest gemacht.

Die Eintheilung des Limbi und seiner Nonien.

XIV. Wenn auch der Geodät mitunter für seine Arbeiten sich eines Winkelmessers bedienen mag, der auf gewöhnlichen Theilscheiben mit der Reisnadel eingetheilt ist, so muß statt dessen der Geodolit des Geographen immer auf eine Art eingetheilt werden, die eine größere Genauigkeit erwarten läßt.

a. Es bedienen sich nemlich die Künstler für die Eintheilung der Limben und Nonien solcher Instrumente der sogenannten Theilmaschienen, auf welchen die Grade mit ihren Unterabtheilungen nach gewissen Maximen verzeichnet werden, welche die größte Richtigkeit der Theilung versprechen.

Um den Centralzapfen einer solchen Maschiene ist nun immer ein Lineal beweglich, in welchem ein Hobel satt hin und wieder in Falzen verschoben werden kann, in welchem der stählerne Zahn feste ist, welcher die Theilstriche reisset.

Will nun der Künstler auf seiner Theilmaschiene den Limbus eines Instruments eintheilen, so bringet er dasselbe über den Centralzapfen der Maschiene, befestiget es in der erforderlichen Lage, und ziehet nun die Theilrisse für die Grade von 10 zu 10, von 5 zu 5, und zu einem Grade, so wie die Parallelen für die Unterabtheilungen des Grades, wornach sodann die Theilung selbst beginnt.

Bey dieser bringet der Künstler das Lineal der Maschiene über die Theilungspuncte seiner Maschiene; stellet den Hobel über die Theilrisse des Limbi; ziehet ihn durch einen gewissen Mechanismus an, wornach der Zahn des Hobels den Strich einschneidet; er führet so das Lineal über den folgenden Theilpunct, ziehet den Hobel an, und fähret mit dieser Manipulation so lange fort, bis der Limbus ganz eingetheilt ist.

Eben so verfähret er auch mit den Nonien.

Wäre nun die Eintheilung der Theilmaschiene ohne allen Fehler, oder mathematisch richtig ausgefallen, so würde der Künstler jeden Theilstrich auf dem Limbus und auf den Nonien mit einer Zuverlässigkeit ziehen können, die sich nach dem Halbmesser der Maschiene, und der Zuverlässigkeit richtet, mit welcher er die Schärfe des Lineals über einem Theilpunct der Maschiene nach seinem Augenmaaß bringen kann.

Bey meiner Theilmaschiene, auf welcher ich ehedem Instrumente theilte, ist die Breite der Theilungspuncte $\frac{1}{1000}$ des Nürnberger Fußes; und in dem Theilungs-Lineal ist ein Glas in einer Fassung feste, auf welchem ein Strich von $\frac{3}{1000}$ Fuß Breite eingezogen, und schwarz eingelassen ist; über welchem ein Mikroscop feste stehet.

Diesen Strich bringe ich bey dem Theilungsgeschäfte jedesmal über den Theilungspunct der Scheibe, und stelle ihn so, daß er mir nach meinem Augenmaaß den Punct gerade mitten zu durchschneiden scheinet.

Würde nun dieses aufs genaueste zutreffen, so würde der Punct auf jeder Seite, über den schwarzen Strich um $\frac{1}{2}$ ($\frac{5-3}{1000}$) oder $\frac{1}{1000}$ eines Fußes hervortretten, welchen Theil ich unter dem Glas von 8maliger Vergrößerung als ein Intervall von $\frac{8}{1000}$ sehe.

Da ich mich nun bey so kleinen Spatien um $\frac{1}{8}$ derselben in der Schätzung irren kann, so kann ich auch nur auf $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1000}$ gewiß seyn, ob der Strich auf dem Glase, von den Punct auf beiden Seiten gleiche Spatien läßt; das ist: ich bleibe in der Stellung des Strichs über der Mitte des Puncts der Theilscheibe, bis auf einen Theil von $\frac{1}{8000}$ eines Fußes gewiß, ob der Strich nicht zu weit rechts oder zu weit links der Mitte des Puncts aufgesetzt ist.

Ist nun der Halbmesser der Theilscheibe = r; so bleibe ich nur bis auf einen Winkel von $\frac{206264}{60000.r}$ Secunden gewiß, ob ich den Glasstrich immer mitten über den Punct setze.

Da ferner der Hobel die Striche auf den Limbus immer ohne allen Fehler in der Richtung einschneidet, die der Künstler seinem Lineal auf der Theilscheibe giebt, so kann ich deswegen die Lage eines jeden Theilstrichs auf dem Limbus immer nur bis auf jenen Winkel gewiß bestimmen.

Für eine Theilscheibe von 4 Fußen, wäre also dieser Winkel nur $\frac{1}{6}$ einer Secunde; er würde für eine nochmal so große Scheibe, nur halb so groß seyn; ich kann also mit derselben jeden Theilstrich auf den Limbus bis auf $\frac{1}{6}$ einer Secunde gewiß einschneiden, wenn die Scheibe selbst ohne alle Fehler eingetheilt wäre, und die Theilung beinahe unter einerley Temperatur vollführt wird.

Wäre statt dessen die Theilung der Theilscheibe unrichtig, so wird nach derselben der Theilstrich auf dem Limbus, um eben so viel fehlerhaft gezogen, als der ihm correspondirende oder Mutterpunct auf der Scheibe selbst fehlerhaft eingestochen ist.

b. Um daher die Theilung der Scheibe möglichst fehlerfrey zu machen, bedienen sich die Künstler verschiedener Maximen; und es bleibt dabey Grundsatz, die Abnahme der Chorden auf einem verjüngten Maaßstab nach der Birdischen Manier, möglichst zu vermeiden; weil die Genauigkeit, mit welcher eine Chorde mit dem Stangencirkel abgenommen werden kann, für die Genauigkeit der Eintheilung einer Theilmaschiene nicht genüget.

Unter diesen ist nun die von dem englischen Künstler Ramsden öffentlich bekannt worden; nach welcher die Theilscheibe durch Schraubengänge, welche in ihren

Rand mit möglichster Genauigkeit eingeschnitten sind, in ihre Theile abgetheilt ist; andere Künstler haben die Eintheilungsmaximen ihrer Theilscheiben noch für sich behalten.

Bey der Eintheilung meiner Theilscheibe bediente ich mich zweier Lineale, die sich um den Zapfen der Scheibe satt drehen ließen und an deren Enden ein Glas in seiner verschiebbaren Fassung eingesprengt war, auf welcher ich einen feinen Strich eingeschnitten hatte.

Ich zog nun auf der Scheibe vorläufig einige blinde Kreise, und theilte einen derselben mit dem Stangencirkel in 6 gleiche Theile; stellte nunmehro die Lineale so, daß mir die Theilstriche ihrer Gläser auf jeder Seite die correspondirenden Puncte für 0„60 und 180„240 durchschnitten, und machte sie ferner in dieser Stellung durch eine Querstange fest.

Nun brachte ich die Liniale auf die Puncte für 60„120 und 240„300; ferner für 120„180 und für 360„0, und sahe nach, ob der Strich auf dem einen Glase, genau den Punct o schnitte, indem ich ihn durch ein Vergrößerungsglas betrachtete.

Traf dieses nicht ganz scharf zu, so merkte ich mir die Differenz, plättete nunmehro die Puncte auf den blinden Theilriß mit dem Gerbstahl zu, und trug statt derselben andere auf, welche jener Differenz besser entsprachen: ich stellte nunmehro die Lineale nach diesen Puncten, probirte dieselbe wie zuvor durch den ganzen Gyrus, und hielt damit so lange an, bis die Glasstriche aufs genaueste wieder den o Punct durchschnitten; mithin gar keine Differenz mehr statt fand.

Diese Puncte galten nun für die richtigen Puncte der Bogen 60„120„180„240„300; ich setzte nachgehends in diese den Cirkel ein, und bestimmte durch Bisectiren vorläufig die Stellen für 30„90„150„270„330.

Diese

Diese prüfte ich nachgehends durch die Striche der Gläser der beiden Lineale, die ihre vorige Stellung auf immer beibehielten; und bestimmte so durch dieselbe die richtige Lage für diese Puncte.

Eben so fand ich auch die Stellen für 15„45„75 u. s.w., die ich wie bisher durch die Bogen von 60 Graden verificirte; bis ich endlich auf diesem Wege auf die Puncte für die einzelnen Grade und deren Abtheilungen herunter kam.

Uebrigens trug ich dabey darauf an, das Theilungsgeschäfte möglichst unter einerley Temperatur zu betreiben; wobey die Chorde von 60 Graden, immer sich gleich bleibet, nach welcher alle Theilpuncte verificiret werden; auch schlief ich jeden einmal berichtigten Punct mit den Lindstein ab, um ihn desto schärfer durch das Glas zu sehen. Auf jeden Fall ist und bleibt dieß Theilungsgeschäfte immer eine sehr mühsame und aufhaltende Arbeit, und erfordert eine Zeit von einigen Monaten; die nur durch die Genauigkeit belohnt wird, welche diese Theilungsmaxime gewähret.

Wie diese Eintheilungsmaxime mit jener des Ritters und Königl. Salinenraths, Hrn. v. Reichenbach in München, zusammentreffe, kann ich nicht sagen; weil ihr berühmter Erfinder die Art, wie er seine Theilungsmaschiene eingetheilt hatte, bisher geheim hielte.

Uebrigens gewährt diese Theilungsmaschiene eine Genauigkeit für die nach ihr abgetheilte geometrisch und astronomische Instrumente, die selbst jene der von Ramsden übertrift; und nur für solche, die den Gebrauch solcher Instrumente durch Uebung sich eigen gemacht haben, überzeugend ist.

Ein Birdischer Quadrant von 8 Fußen Halbmesser spricht durch seinen Nonius noch 5 Secunden an; aber eben dieses leistet auch ein Reichenbachischer Geodo-

lith

lith von 8 Zollen Halbmesser; er leistet also für seine Größe 12mal mehr als ein Birdischer Quadrant.

Zuverlässigkeit einer gewöhnlichen Theilscheibe, nach welcher geometrische Instrumente eingetheilt werden.

XV. Indem ich hier die Zuverlässigkeit, mit welcher eine Theilscheibe eingetheilt werden kann, erwäge, abstrahire ich gänzlich von allen speciellen, mit Vortheil verknüpften Eintheilungsmaximen der Künstler, und betrachte deswegen nun die allgemeine oder gewöhnliche Art der Künstler, Theilscheiben zu fertigen, nach welcher sie ganze Kreise und Nonien für dieselbe eintheilen.

Nach derselben ziehet nemlich der Künstler auf einer kupfernen abgeschliffenen Scheibe, aus einem in ihrer Mitte festen runden Zapfen, mit einem um denselben satt gehenden Lineal einen Kreis, dessen Halbmesser nicht unter zwey landüblicher Fuße ist; um den Kreis mit dem Zapfen concentrisch zu machen.

Diesen Kreis theilet er nun vorerst in 6 gleiche Theile, um die Puncte für 60„120„180„240„300„360 zu erhalten: er bisectiret jeden solchen Theil, um die Puncte für 30°„90„120„150„210„270„330 zu erhalten.

Er bisectiret jeden dieser Bogen neuerdings für die Bögen 15„45„75...; theilet jeden solchen Bogen abermals in 5 Theile für Bogen von 3 zu 3 Graden; und theilet endlich für die Gradtheilung selbst jeden solchen Bogen in 3 Theile; wornach er nach Umständen jeden Grad noch in kleinere Theile eintheilet.

Was nun bey dieser Theilung einmal die Zuverlässigkeit für den Bogen von 60 Graden anbelangt, so findet diese der Künstler durchs Probiren, indem bey einer-

ley

ley Temperatur der Scheibe er seinen mit einer hölzernen Stange, und einem Schraubenmikrometer mit Cadrans versehenen Stangencirkel eine Oeffnung giebt, in welcher er bei'm 6ten Umschlag aufs genaueste in den Anfangspunct wieder einschlägt oder zusammentrift.

Dieses Einschlagen der scharfen stählernen Spitze des Stangencirkels beurtheilet der Künstler nicht sowohl durch das Gefühl seiner Hand, als vielmehr durch ein scharfes Augenglas, das ihm diesen Punct wenigstens 10mal vergrößert, und den feinen Strich, mit welchem er diesen Punct durchschneidet, deutlich zeiget: er kann daher in der Lage dieses Strichs nur um so viel fehlen, als er nach seinem Augenmaaß ungewiß bleibt, ob jener Strich die Mitte des Puncts wirklich durchschneidet, oder nicht.

Wäre ein solcher Punct $\frac{1}{4300}$ eines Fußes breit, so mißt er in dem Centro einer Scheibe von 2 Fuß Halbmesser $\frac{206264}{9000} = 25{,}38$ Secunden; konnte nun der Künstler diesen durch das Augenglas 10mal vergrößerten Punct, nur bis auf seinen 6ten Theil sicher durch sein Augenmaaß bisectiren, so bleibt er bis auf einen Winkel von 4,45 Secunden gewiß, ob jener feine Strich gerade durch die Mitte des Theilpunctes gehe oder nicht; welches auf die 6 Cirkelschläge ausgeschlagen, auf einen in den andern 0,74 Secunden macht: das ist, der Künstler kann auf seiner Theilscheibe die Puncte für 60„ 120„ 180„ 240„ 300„ 360; oder die Puncte der ersten Ordnung, bis auf $\frac{3}{4}$ Secunden sicher bestimmen.

Bisectiret der Künstler jeden Bogen der ersten Ordnung, so erhält er die Bogen der zweiten Ordnung auf seine Theilscheibe, deren jeder durch 30 ohne Rest theilbar ist.

Würde er nun jeden solchen Bogen mathematisch richtig bisectiren, so wäre er nichts destoweniger in der

Lage

Lage jedes solchen Puncts um den Theil $\frac{3}{4.2}$ oder $\frac{3}{8}$ Secunden ungewiß; weil er die Bogen der ersten Ordnung nur auf $\frac{3}{4}$ Secunden sicher bestimmen konnte.

Nun bisectiret er aber jeden solchen Bogen durchs Probieren, indem er den Stangen-Cirkel nach einem der Puncte der ersten Ordnung umschläget; und bleibt dabey wieder nur bis auf einen Winkel von $4\frac{3}{4}$ Secunden gewiß, ob der feine Bogen des Cirkels auch wirklich die Mitte dieses Punctes durchschneidet, oder nicht: dieser auf die zwey Bogen ausgeschlagen, giebt auf den Bogen von 30 Graden $\frac{4\frac{3}{4}}{2}$ oder $2\frac{3}{8}$ Secunden.

Addiret man diese zu den $\frac{3}{8}$ Secunden, wegen der Unsicherheit des Bogens von 60 Graden, so ergiebt sich hieraus, daß der Künstler in der Lage jedes 30ger Punctes- oder jedes Punctes der andern Ordnung nur bis auf $2\frac{3}{4}$ Secunden gewiß seyn kann.

Bisectiret der Künstler jeden Bogen der andern Ordnung, so erhält er die Bogen der IIIten Ordnung, deren jeder durch 15 ohne Rest theilbar ist; und es folget aus der bisherigen Ansicht, daß er jeden Bogen dieser Ordnung auf dieser Theilscheibe nur bis auf $3\frac{3}{4}$ Secunden sicher bestimmen kann.

Er theilet ferner jeden Bogen der IIIten Ordnung oder von 15 Graden in fünf gleiche Theile, und erhält so den Bogen der IVten Ordnung von 3 Graden.

Könnte er nun jeden solchen Bogen geometrisch richtig bestimmen, so würde er jeden Punct auf $\frac{3\frac{3}{4}}{5}$ oder auf $\frac{3}{4}$ Secunden sicher zeichnen; da er aber bey dem fünften Umschlag des Cirkels wieder nur auf $4\frac{3}{4}$ Secunden gewiß ist, ob der Cirkelschlag durch die Mitte eines Puncts der IIIten Ordnung wirklich gehe, so kann er in

jedem

jedem Punct dabey nur $\frac{4\frac{3}{4}}{5}$ oder $\frac{19}{20}$ Secunden fehlen: er bleibt daher in der Lage jedes Puncts der IVten Ordnung, der als solcher durch 3 ohne Rest theilbar ist, bis auf $\frac{19}{20} + \frac{15}{20}$ oder $1\frac{7}{10}$ Secunden gewiß.

Letztlich theilet er auch noch jeden Bogen der IVten Ordnung in 3 gleiche Theile, und erhält so auf dem Theilriß die einzelne Grade als Bogen der (V)ten Ordnung, und bleibt dabey in der Lage jedes solchen Puncts auf $\frac{1\frac{7}{10}}{3} + \frac{4\frac{3}{4}}{3}$, oder $2\frac{3}{4}$ Secunden gewiß.

Würde der Künstler jeden Bogen von 60 Graden durch ein vorsichtiges Umschlagen des Cirkels auf dem Theilriß in 12 gleiche Theile oder von 5 zu 5 Graden abtheilen, so würde er jeden solchen Theil bis auf $\frac{3}{4.12} + \frac{4\frac{3}{4}}{12}$ oder $\frac{22}{48}$ oder $\frac{11}{24}$ Secunden sicher bestimmen; er würde, wenn er jeden solchen Bogen weiter in 5 Theile nach seinen einzelnen Graden abtheilet, jeden Grad bis auf $\frac{11}{24.5} + \frac{4\frac{3}{4}}{5}$ oder $\frac{125}{128}$ oder $\frac{25}{24}$ Secunden sicher auftragen können.

Dabey verstehet es sich, daß er die feinen Pünctgen, die er bei'm Probiren dieser Bögen auf dem Theilriß provisorisch erhält, mit dem Gerbstahl aufs schönste zuplättet, um die Finalpuncte um so schöner und sicherer zu erhalten. Auch muß der hiezu zu gebrauchende Federcirkel äußerst feine stählerne Spitzen von einer Härte haben, in welcher die Spitzen nicht stumpf werden, oder wohl gar abbrechen.

Ist auf diese Art die Theilscheibe in ihre Grade und Theile derselben abgetheilt, so werden die Puncte mit Schwärze eingerieben, und ein Streifen derselben, in welchen der Theilriß fällt, mit dem Lindstein abgeschliffen

und

und kalt versilbert, damit die schwarzen Puncte auf dem Silbergrund sich um so besser ausnehmen, oder sich heben.

Will nun der Künstler nach seiner Theilscheibe den Limbus eines Instruments eintheilen, so bringt er dessen Centralloch über den Zapfen der Scheibe, und schraubet das Instrument auf der Scheibe fest.

Er legt ferner ein Lineal über den Zapfen der Scheibe, das vorne, wo es die Theilpuncte streifet, einen feinen Silberdrath ausgespannt hat, der nach seiner Stärke die Puncte derselben nicht ganz zudecket; er bringt in der Falze des Lineals den Hobel an, welcher den Zahn faßt, mit welchem die Theilstriche des Limbi, nach (XIV. a.), gezogen werden.

Mehrere Künstler reißen die Theilstriche auch nur mit der Reißnadel an einer scharfen Face des Lineals, indem sie in die Theilungspuncte der Scheibe eine feine Spitze drücken, die in dem Lineal über den Theilriß eingeschraubt ist.

Dieses Verfahren hat zwar den Vortheil, daß der Künstler in der Anlage des Lineals nicht fehlen kann, weil die Spitze immer die Mitte des Theilpuncts sucht; aber dagegen tritt der Umstand ein, daß die feinen Puncte durch das öftere Einsetzen der Spitze immer weiter, und wohl gar excentrisch werden; und daß außerdem die Reißnadel an die scharfe Face nicht einmal wie das anderemal gleichscharf angelegt wird; es verliert die Nadel selbst ihre vorige Lage in der Hand des Künstlers, wenn sie während der Theilung auf eine Art geschliffen wird, wobey ihre Spitze ihre bisherige Stelle ändert.

Prüfung der Eintheilung des Limbi eines Geodolithen.

XVI. Aus dem in (XV.) über die Eintheilung einer Theilscheibe, und ihren Gebrauch angeführten, erhellet nun

nun immer so viel, daß selbst bey einer auf die gewöhnliche Art gefertigten Theilscheibe die Eintheilung ihrer Theilrisse eine größere Genauigkeit gewinnt, als sich vorläufig erwarten ließe; wenn nur der Künstler den möglichen Fleiß auf ihre Eintheilung anwendet: es muß daher die Eintheilung solcher Theilscheiben, bey welchen die Künstler noch außerdem gewisse Vortheile anwenden, noch um so genauer ausfallen, je mehr diese dem Zweck an und für sich entsprechen.

Wenn daher der Geograph die Eintheilung des Limbi seines concentrischen Geodolithen prüfen will, so muß er ein Verfahren dabey anwenden, das eine noch größere Zuverlässigkeit verspricht, als jene ist, mit welcher der Künstler den Geodolithen selbst einzutheilen vermag; weil er diesem sonst leichtlich Fehler seines Instrument imputiren kann, die von ihm selbst herkommen!

a. Diese Prüfungsmaximen aber sind von zweyerley Art: nemlich die Comparation und die geometrische Prüfungsmethoden.

Nach der erstern verschiebt der Geograph den Nonius der Alhidade mit dieser über der Eintheilung des Limbi, und siehet bey einer starken Vergrößerung nach, in wieferne die correspondirenden Theilstriche des Nonii und des Limbi zusammenpassen; er vergleichet so den Bogen des Nonii mit dem correspondirenden Bogen des Limbi nach und nach, durch seinen ganzen Theilriß.

Würde nun der Geograph nach seiner Gesichtsschärfe bey der angewandten Vergrößerung den ersten und letzten Theilstrich des Nonii mit den correspondirenden des Limbi immer mathematisch richtig zusammenpassen können, so würde er die Differenzen schätzen können, um welche der Bogen des Limbi größer oder kleiner als der Bogen des Nonii ist; und so die Eintheilung des Limbi in so weit

genau

genau prüfen können, als er sich in jenen kleinen Differenzen verschätzen kann.

Statt dessen aber kann er jeden Theilstrich des Nonii mit einem Theilstrich des Limbi nicht genauer zusammenpassen, als seine Gesichtsschärfe bey der angewandten Vergrößerung zuläßt. §. 4. VIII.

Ist dieser Theil für jeden Strich 0,371 Secunden, so ist es möglich, daß der eine sich gegen den andern aufhebt, aber eben so gut ist es möglich, daß beide auf eine Seite fallen; der Geograph bleibt daher immer in den Bogen, welchen der Nonius überspannet, nur bis auf 2. 0,371 oder 0,742 Secunden gewiß, ob er um dieselbe nicht größer oder kleiner als der Bogen des Nonii ist; wenn er auch mit ihm aufs genaueste zusammen zu passen scheinet.

Weichet statt dessen der eine Theilstrich von dem correspondirenden des Nonii augenfällig ab, so kann in dieser Diferenz der Geograph sich in soweit verschätzen, als ihn für ihre Vergrößerung sein Augenmaaß trügen kann. §. 4. V.

Diese Prüfungsmethode gewähret daher eine Zuverlässigkeit, die über noch einmal so groß als die Zuverlässigkeit ist, mit welcher der Künstler auf einer gewöhnlichen Theilscheibe von 4 Fuß sein Instrument eintheilen mochte (XV.); sie genüget aber nicht mehr für Instrumente, die auf bessern Theilungsmaschienen mit größten Fleiß getheilt sind.

b. Was ferner die geometrische Prüfung der Eintheilung des Limbi anbelangt, so geschiehet diese gewöhnlich durch das Multipliciren eines Winkels K, §. 4. VI., welchen zwey entfernte, in der Ebene des Limbi liegende Gegenstände P„Q an der Stelle C. des Instruments mit einander machen.

Diese

Diese sind am schicklichsten zwey schwarze an einer Wand senkrecht gezogene Striche, deren Bild die kürzeste Sehne des deutlichen Sehens des Fadenkreuzes gerade überspannet. §. 4. VIII.

Ist z. E. der Winkel k = 30 Grade, so prüfet der Geograph auf seinem Instrument, dessen Concentricität er sich zuvor aufs genaueste versichert hat, die Lage der Theilstriche 30„60„90„100„130„ u. s. w.; er nimmt die Theile, um welche die gerissenen Bogen von den observirten abweichen, nach dem Nonius ab, und schätzet kleinere Abweichungen, die der Nonius nicht unmittelbar ansprechen kann, nach seinem Augenmaaß. §. 4. VIII. b.

Da aber selbst der geübteste Beobachter bey einem der vortreflichsten Geodoliten von 18 Zollen in §. 4. VIII. einen Winkel nur bis auf 2 Secunden sicher ablesen und visiren kann, so ist auch diese Art der Prüfung für Instrumente von scharfer Eintheilung nicht anwendbar.

Beide Prüfungsarten dienen daher nur, solche Fehler in der Eintheilung zu entdecken, die ihren Grund mehr in dem Versehen des Künstlers, als in seiner Theilmaschiene liegen. Wo solche Fehler aber öfters vorkommen, geben sie das Beleg für eine sorglose Eintheilung; und dem Geographen bleibt nichts anders übrig, als ein solches Instrument gar nicht zu gebrauchen.

Wollte der Geograph die Eintheilung seines Instruments durch die absolute Größe gegebener Winkel prüfen, so müßte er in dem Dreyeck PCQ in (b.) die Weite PQ und eine in ihren Bisectierpunct (D) treffende Perpendiculare aufs genaueste messen, und hieraus den parallactischen Winkel K berechnen: er stellet nun das Instrument am Ende des Perpendikels in C aufs genaueste horizontal auf, nimmt mit demselben die Visionen nach P und Q, und siehet nach, wie der berechnete Winkel N

mit

mit dem gemessenen zusammentrift; er hält sodann den Unterschied zwischen beiden für den Fehler der Eintheilung.

Dieser Fehler findet sich für den nemlichen Winkel für verschiedene Bogen des Instruments, wenn der Winkel öfters repetirt wird.

Setzt man die Distanz PQ = a; den Perpendikel = r; so ist bekanntlich

$$2r\sin\tfrac{1}{2}C = a;\quad \sin\tfrac{1}{2}C = \frac{a}{2r};\quad r = \frac{a}{2\sin\frac{1}{2}C}.$$

Diese Prüfungsart erfordert aber die allergenaueste Messung der Distanz PD und DQ, und des Perpendikels DC, um nach derselben das absolute Maaß des Winkels C zu finden. Sie muß daher niemals mit der Kette, sondern mit Stangen aufgeführt werden, die man über hölzernen Latten abschiebet. §. 8. III. d.

Es habe z. E. der Geograph auf diese Art an einer Wand eine Linie von 60 Fußen aufs sorgfältigste gemessen, und an ihren Enden schwarze Streifen gezeichnet, deren Bisectionslinie aufs genaueste in die Enden der Linie oder in die Puncte P „ Q trift; er will durch dieselbe den Bogen 15 „ 30 „ 45 „ 60 seines Instruments prüfen, so muß er aus der Mitte D der Linie PQ eine Perpendiculäre von 229,84 Fußen messen; und die Mitte seines Instruments aufs genaueste über den Endpunct derselben, durch einen herabhängenden, in eine scharfe Spitze sich verlaufenden Senkel bringen.

Findet er nun den gemessenen Winkel zu 15° „ —′ „ 4″, so würde er sagen, der Bogen von 15 Graden wäre auf dem Limbus um 4 Secunden zu groß. Repetirt er diesen Winkel, §. 4. VI., und liest auf dem Limbus 30° „ 0′ „ 5 Secunden; bey der 3ten Repetition aber den Winkel zu 45° „ 0′ „ 0″ ab, so würde er den Bogen von 30 Graden um 5 Secunden zu groß, den Bogen von 45 aber für richtig erkennen.

Könnte nun der Geograph die Distanzen PQ „DC ohne Fehler messen, und nach seiner Gesichtsschärfe und seinem Augenmaaß, die Winkel geometrisch richtig avisieren und ablesen, §. 4. VIII., so würde er in jenen Distanzen auch die wirklichen Fehler der Eintheilung dieser Bogen gefunden haben.

Statt dessen aber ist er einmal rücksichtlich des absoluten Maaßes des Winkels C nur auf die Differenz dC gewiß, weil er die Linie PQ nur bis auf den Theil ±(da), und DC nur bis auf ±(dr) sicher messen kann.

Auch ist aus der Gleichung $\log 2 + \log r + \text{Sin } \frac{1}{2}C = \log a$, auch

$$\frac{dr}{r} + \frac{1}{2}dC.\text{Cot.}\frac{1}{2}C = \frac{da}{a};$$ also in Secunden

$$dC = 2\left(\frac{da}{a} + \frac{dr}{r}\right).\text{tang}\,\frac{1}{2}C.\,206264.$$

Setzt man nach der Erfahrung §. 8. III. d.

$$\frac{da}{a} = \frac{dr}{r} = \frac{1}{384000};$$ so ist

$$2.\left(\frac{da}{a} + \frac{dr}{r}\right) = \frac{1}{96000};$$ und

$$\begin{aligned} \log \frac{1}{96000} &= 0{,}0174507-5. \\ \text{l.tang}\,\tfrac{1}{2}C &= 9{,}1194291-10. \\ \text{l. } 206264 &= 5{,}3144252. \\ \log dC &= 4{,}4513050-5. \\ dC &= 0{,}28268. \end{aligned}$$

Der Geograph würde also des absoluten Maaßes des Winkels C erst bis auf 0,28 Secunden sicher seyn, wenn er jede Seite seines Prob-Dreyecks bis auf $\frac{1}{384000}$ ihrer Länge sicher messen konnte.

Ist er nun ferner in dem Visieren und Ablesen des Winkels und rücksichtlich der unmerklichen Excentricität seines Instruments §. 5. III. bis auf 2 Secunden gewiß,

§. 4. VIII.; so erhellet hieraus so viel, daß er Fehler seines Instruments, die kleiner als 3 bis 4 Secunden sind, auch auf diesem Wege nicht mehr mit voller Gewißheit ausfinden kann.

Wenn daher der Geograph bey einer oder der andern dieser Prüfungsarten bey seinem Instrument nur Differenzen vorfindet, die nicht größer sind, als die kleinen Winkel, für welche er bey der Prüfung rücksichtlich seiner selbst nicht stehen kann, so berechtiget ihn dieses, der Eintheilung seines Instruments volles Vertrauen zu schenken.

Das Winkelmessen mit dem Spiegelsextanten.

XVII. So wie der Geodolith für die Aufnahme der Winkel großer sphärischer Dreyecke unumgänglich nothwendig ist, eben so wird der Spiegelsextant als Winkelmesser für die Aufnahme solcher Dreyecke mit Vortheil verwendet, die nach der Länge ihrer Seite ohne merklichen Fehler als geradlinichte angesehen werden können.

Bekanntlich bestehet nun ein solcher Sextant nach seinen wesentlichsten Theilen aus einem messingenen Sector OCE in Fig.(12.) Tab.II., dessen eingetheilter Limbus OE mit Silber plattirt ist. Ueber denselben beweget sich um seinen Mittelpunct C eine Alhidade, über welcher in C ein Spiegel senkrecht feste, und an ihrem Ende ein Nonius angebracht ist, welcher die von o nach E gehende Theilung des Limbi streifet, und als solcher gewöhnlich auf dem Limbus noch 10 Secunden anspricht.

Auf zwey hervorspringenden Armen des Sextanten ist ferner in E ein zur Hälfte belegtes Spiegelglas parallel mit der Fiducial- oder Eintheilungs-Linie CO des Sextanten, und in G ein Support feste, welcher einen Achromat trägt, welcher die directe durch das unbelegte

Spiegelglas einfallende, und gleichzeitig auch die von dem Centralspiegel in C nach E geworfene, und von dem belegten Theil des Spiegels reflectirte Strahlen auffängt, und von beiden ein dioptrisches Bild entwirft.

Die Sextanten, welche gewöhnlich zu Winkelmessungen gebraucht werden, haben meistens 5 bis 10 Zoll Halbmesser, bey einer 5 bis 10maligen Vergrößerung ihres Achromats.

Will man nun mit dem Sextanten einen Winkel ACB messen, welchen zwey entfernte Gegenstände A„B in seinem Mittelpunct C machen, so richtet man seinen Achromat nach dem Gegenstande A, so daß dessen directe, durch die unbelegte Hälfte des Planglases in E nach seinem Objectiv kommende Strahlen ihr dioptrisches Bild in ihm machen, und drehet nun die Alhidade so lange, bis die von dem Gegenstande B auf den Spiegel in C fallende Strahlen, von diesem dermaßen nach E reflectirt werden, daß sie als von der belegten Seite des E nach dem Achromat geworfene, in diesem ein catoptrisches Bild entwerfen, das aufs genaueste mit dem dioptrischen Bild des A in eine gerade Linie fällt, oder beide sich berührende Bilder genau unter einander zu stehen kommen: es hält dabey der Beobachter den Sextanten an seinem Stiel in freier Hand, oder er setzet ihn auch auf einem tragbaren Statif auf, wo das Locale dieses gestattet.

a. Denkt man sich den Strahl BC in seiner Richtung, und eben so auch den Strahl AE in seiner Richtung hinter sich verlängert, so schneiden sich beide in dem Winkel AKC, statt dessen der wahre Winkel, welchen die Objecte A„B in C mit einander machen, AoB wirklich ist.

Von diesen mißt nun der Winkel oCP, um welchem die Alhidade aus der Parallele Co mit der Ebene des Spiegels E sich verschieben mußte, bis beide Bilder genau

nau zusammen treffen, den Winkel AKC unmittelbar durch ihren Nonius.

Verlängert man nemlich die Ebene des Spiegels E, so schneidet sie die Linie CP in dem Puncte F, und es ist DFC = oCP als Wechselwinkel.

Fällt nun der Strahl BC unter dem Winkel aCB auf den Spiegel auf, so reflectirt er sich unter dem gleichen Winkel LCD nach E, und fällt auf diesen unter dem Winkel bDC = FDK auf, und es ist deswegen aCB = LCK als Scheitelwinkel.

Ferner ist bDC = DCF + DFC als äußerer Winkel; oder DFC = bDC — DCF.

Bey L ist ferner CLK = DLF; mithin in den Dreyecken CLK und DFK

LCK + LKC = LDF + DFC; also

LKC = LDF — LCK + DFC; oder

LKC = bDC — DCF + DFC = 2DFC. = 2OCP.

Der Winkel AKC ist also immer nochmal so groß als der Winkel OCP, um welchen man den Index des Nonii von dem o Punct der Eintheilung verschieben muß, bis das dioptrische Bild des A mit dem catoptrischen des B im Auge zusammen trift.

Man müßte daher den gemessenen Winkel oCP immer duppliren, um den Winkel AKB zu erhalten; wenn der Sector nicht an und für sich schon in 120 halbe Grade getheilt wäre, die hier ganze Grade vorstellen.

b. Der Beobachter mißt also durch den Sextanten statt des wahren Winkels ACB, welchen die Gegenstände A„B in C unter sich machen, den Winkel AKB; und es ist ACB = AKB + CAK.

Denkt man sich von C nach der Axe des Fernrohrs einen Perpendikel, CM, so ist 1 : AC = Sin CAK : CM; CM = AC. Sin CAK.

Will daher der Beobachter mit seinem Sextanten die Winkel aufs genaueste messen, so muß er vorerst den Perpendikel CM für denselben berechnen; wenn er sich nicht begnügen will, denselben zu messen.

Er mißt nemlich für zwey Gegenstände A und B, von welchen er den Abstand des A aufs genaueste kennt, mit einem Geodolithen oder sonstigem Winkelmesser den Winkel ACB; welchen er nachgehends auch mit seinem Sextanten dergestalt mißt, daß sein Centrum mit der Stelle des Centri des Winkelmessers zusammentrift: er findet so in der Differenz beider den Winkel CAK; aus welchen und der Weite AC er ein für allemal den Perpendikel CM = (c) berechnet.

Ist nun der Abstand eines Gegenstandes, welchen der Beobachter in dem Achromat directe siehet = δ; so muß derselbe dem mit dem Sector gemessenen Winkel den parallactischen Winkel AMC von $\frac{e}{\varrho}$. 206264 Secunden addiren, um das wahre Maaß des Winkels zu erhalten.

c. Da das Licht, welches von einem entfernten Gegenstand auf den Centerspiegel des Sextanten trift, von ihm nach dem Seitenspiegel, und von diesem nach dem Fernrohr reflectirt wird, so bildet sich hiedurch eine Lichtreflexions-Ebene über demselben.

Soll nun der Sextant die Winkel richtig messen, so muß diese Reflexionsebene mit seiner eigenen Ebene parallel seyn, weil jede Abweichung derselben von dem Parallelismus in den gemessenen Winkel einen Fehler bringt, der jenem gleich ist, um welchen man mit einem gegen den Horizont eben so stark geneigten Geodolithen fehlerhaft mißt.

Dieser Umstand aber tritt bey dem Sextanten nur alsdann ein, wenn die vordern Ebenen seiner beiden Spiegel in jeder Richtung senkrecht auf die Ebene des

Sextan-

Sextanten stehen: es zeiget sich dabey das Bild eines Gegenstandes in dem Fernrohr um so deutlicher, je näher bey jedem Spiegel seine hintere belegte Seite, mit seiner vordern Fläche parallel ist, je besser das Beleg nach seiner Qualität und je inniger seine Berührung mit der hintern Fläche ist; es zeiget sich dabey noch um so deutlicher, je besser die Spiegelfläche polirt und je ebener sie ist; es deformirt statt dessen ein Spiegel sein Bild um so mehr, je weniger seine vordere und hintere Ebene unter sich parallel sind, und je mehr er durch seine Spannung in seiner Rahme sich cylinderartig oder sphärisch verwerfen muß, oder er durch das zu feste Anspannen seiner Rahme auf den Untersatz, sich krumm verwerfen muß.

Erstere Abweichung der Spiegelebenen unter sich findet sich für einen Spiegel am füglichsten durch ein Object, das viel Licht von sich strahlet: er zeiget am Rande seines Bildes einen matten Halbschatten, der um so breiter ist, je mehr bey der keilförmigen Figur des Spiegels die Refraction auf der hintern Ebene von der vordern abweichet; ein solcher Spiegel ist daher ein für allemal unbrauchbar.

Hat sich statt dessen der Spiegel krumm geworfen, so deformirt er das Bild, wie ein Cylinderspiegel von seinem Krümmungshalbmesser; er verwirft sein Bild, wie ein sphärischer Spiegel, wenn er sich in der Mitte dadurch blähen muß, daß er nach seiner Substanz sich stärker, als seine messingene Rahme pyrometrisch auszudehnen strebt.

Hat nun weder der Center- noch der Seitenspiegel eines Sextanten diese Fehler, so stehet er seines Orts senkrecht auf der Ebene des Instruments selbst, wenn das Bild eines über den Centerspiegel parallel mit der Ebene des Instruments gespannten feinen Haares, nach

dem

dem Auge in einer Richtung reflectirt wird, die parallel mit der Ebene des Instruments ist.

Prüfung des Sextanten.

XVIII. Diese nothwendige Eigenschaft nun zu prüfen, nimmt der Beobachter den nächsten Abstand der Mitte des Fernrohrs von der Ebene des Instruments, welcher (α) Zolle ausmacht, von G; spannet ein Haar in dem Abstand (α) von der Ebene des Instruments parallel mit derselben über den Centerspiegel; stellet in G ein Visierloch auf, das um α Zolle von G abstehet. Siehet er nun den Faden durch das Visierloch aufs genauste, während der Centerspiegel mit seiner Alhidade gedrehet wird, so ist die Reflexionsebene der Spiegel mit der Ebene des Instruments parallel. Ist dieß aber nicht; so leget man Streifen dünnen Papiers unter die Rahmen der Spiegel, und ziehet diese mit ihren Stellschrauben an, bis jene Eigenschaft eintritt.

Setzt man nachgehends das Fernrohr mit seinem Support in (G) wieder auf, und der Faden des Centerspiegels zeiget sich in der Mitte seines Sehefeldes, so ist auch dieses parallel mit der Ebene des Instruments; man leget unter den Support Papierscheiben, wo dieser zu niedrig ist; oder elevirt oder incliniret durch dieselbe das Fernrohr um den kleinen Abweichungswinkel, bis der Faden genau die Mitte seines Sehefeldes durchscheidet.

a. Stehet der Centerspiegel genau in der Fiduciallinie CO der Eintheilung des Instruments, und ist mit ihm auch der Seitenspiegel in (D) Fig. (12. Tab. II.) parallel, so ist der Winkel cCP = o in (a.).

Machen statt dessen die Ebenen beider Spiegel einen Winkel = z mit einander; so weichet der Index der Alhidade um den Bogen Ou an dem o Punct ab, wenn das

Auge

Auge von einem sehr weit entfernten Gegenstand sein dioptrisches und catodioptrisches Bild im Fernrohr gleichzeitig siehet.

Dieser Winkel OCu muß nun nach Umständen bey dem Gebrauch des Sextanten von jedem mit ihm gemessenen Winkel abgezogen oder auch addirt werden, wenn er nach der exparallelen Stellung des Seitenspiegels in die Lage Ow trift.

Dieser Winkel muß daher aufs genaueste durch ein Mittel aus mehrern Beobachtungen gefunden und nachgehends, auch während des Gebrauchs des Sextanten, öfters geprüft werden, ob er sich nicht durch eine unmerkliche Drehung des Seitenspiegels, durch den Transport, verändert hat?

Diesen Winkel oder den Collimationsfehler des Sextanten aufs genaueste zu finden, bedienet sich der Beobachter am füglichsten einer horizontal gestellten Latte PDQ in (XVI. b.), auf welche von ihrer Mitte D aus, zur Rechten und Linken gleiche Theile aufgezeichnet sind.

Er bringet den Mittelpunct seines Instruments in die Perpendiculare DC derselben, und mißt vorerst mit demselben einen kleinen Winkel PDC = oCn, welchen die Scale DP in C macht; er mißt sodann auf der andern Seite den Winkel DCQ = ocw, welchen die Scale DQ = DP in C macht.

Bisectiret nun der (o) Punct den Bogen uw in Fig. (12.), so ist der Winkel uCo = wCo der wirkliche Collimationsfehler des Instruments; ist dieses aber nicht, und z. E. wCo > uCo, so ist dieser Fehler $\frac{1}{2}$.(wCo-uCo).

Setzt man diese Winkelmessung durch den ganzen Bogen oz nach und nach fort, um welchen die Theilung des Limbi den (o) Punct excedirt, so kann man den Collimationsfehler um so sicherer durch das arithmetische Mittel finden, aus je mehr Beobachtungen man dieses nehmen kann.

Rich-

Richtet man nun das Fernrohr nach einem weit entlegenen Object A und drehet die Alhidade so lange, bis sich sein reflectirtes Bild genau unter seinem dioptrischen zeiget, so bemerkt der Beobachter den Stand des Index auf dem Limbo; so lange nun dieser den nemlichen Stand beibehält, wenn der Beobachter in der Folge nach einem weit entfernten Object siehet, so lange darf er auch annehmen, daß die Spiegel ihre Lage nicht geändert haben, daß mithin auch der Collimationsfehler seines Instruments noch derselbe seye, der sich ihm durch jenes Mittel ergab.

Kann der Beobachter den Seitenspiegel in so weit drehen, daß der Collimationsfehler verschwindet, so mißt er mit seinem Instrument jeden Winkel in so weit ohne Fehler, als die Eintheilung seines Limbi und des Nonius ohne Fehler und der Gang des letztern concentrisch mit dem Theilriß ist; und er darf nur noch die Correction wegen des parallactischen Winkels (a.) vornehmen.

b. Ob aber die Bewegung des Nonii mit dem Theilriß concentrisch seye oder nicht, lässet sich bey diesem Instrument nicht nach (I.) beurtheilen; weil die Alhidade nur einen Nonius haben kann.

Ueberhaupt ist die Excentricität der Erbfeind jedes Instruments, und kann auch von dem geschicktesten Künstler nie ganz beseitiget werden; sie kann aber insbesondere für solche Instrumente bedeutend werden, bey welchen man auf der Theilungsmaschiene den Centralzapfen öfters ausschrauben, und bald einen dickern, bald einen dünnern einschrauben muß, nach der Dicke des Zapfens, welchen das einzutheilende Instrument hat.

Je öfter man nemlich den Zapfen aus- und einschraubet, um so mehr nutzet sich sein Gewinde aus, und die Basis des Zapfens, auf welcher er auf der Maschiene aufsitzt, nutzet sich ab; sie schleifet sich auf jener Stelle am

mei-

meisten ab, wo sie den grösten Druck beim Anziehen empfindet; und gewinnt dadurch in etwas eine schiefe Stellung auf der Theilscheibe.

Dieß ist daher bey der Ramsdenschen Theilungsmaschiene insbesondere möglich, auf welcher die meisten englischen Künstler ihre Instrumente eintheilen lassen, die verschiedene Zapfenlöcher haben.

Kommt nun hiezu noch der Umstand, daß jener, welcher die Theilung zu verrichten hat, sich durch den täglichen Betrieb ein und derselben Arbeit, endlich eine gewisse Gleichgiltigkeit oder Nachlässigkeit angewöhnt, so ist es möglich, daß in die Theilung eines Winkelmessers Fehler kommen können, die für jene unbegreiflich sind, die wissen, wie genau man mit einer richtigen Theilmaschiene eintheilen kann, wenn man mit der grösten Sorgfalt und Fleiß dabey verfähret (XV.).

Wenn es nun darauf ankommt, die Concentricität des Instruments zu prüfen, so scheinet mir hiezu das einzige Mittel in der Vergleichung der Abstände der Schärfe des Nonii von dem Theilrisse an verschiedenen Stellen, zu liegen: sind diese Abstände durchaus gleich, so ist die Bewegung der Alhidade mit dem Theilriß in so weit concentrisch, als sie sich auf diese Art beurtheilen lässet; ist dieses aber nicht, so möchte sich die Excentricität, und ihre Folgen auf folgende Art beurtheilen lassen.

Bey einem gewöhnlichen Quadranten führte ich seine Alhidade auf dem Limbus herum, und strich mit einer scharfen Reißnadel an der scharfen Kannte des Nonii hie und da ein feines Strichchen vor. Als ich nun die Abstände dieser Striche von dem nächsten Theilriß des Limbi durch Auflegung eines Branderschen Glasmikrometers bey 10maliger Vergrößerung maß, stund der Strich bey B in Fig.(13.) in 30 Grad Abstand von dem Anfangspunct o der Eintheilung unter allen übrigen von dem Theilriß am weitesten ab. Als

Als ich nun die Abstände von einander abzog, fand ich BF zu $\frac{1}{5}$ eines Intervalls des Mikrometers, bey welchem 100 Theile gerade einen Decimalzoll machen; ich schloß daher, daß die Excentricität des Quadranten in die Richtung CB fallen, und $FB = C\gamma = \frac{1}{5}\frac{1}{000}$ Fuße betragen; mithin der Durchschnittspunct E des Theilrisses mit dem Bewegungskreis des Nonii, um den Bogen $oB+BE = 30+90$ oder 120 Grade von dem Anfangspunct (o) der Eintheilung des Quadranten abstehen müsse.

Verschiebet sich nun der Index des Nonii auf dem Limbus um den Bogen OH, so lieset der Beobachter den Winkel OCH auf ihm ab, statt dessen der Index eigentlich um den Winkel $O\gamma H$ seinen Ort verändert hat; er begehet also in dem aufgenommenen Winkel, einen Fehler $OCH - O\gamma H$.

Nun ist aber $O\gamma H = O\gamma B + B\gamma H$; und $OCB = O\gamma B + CO\gamma$; mithin auch $O\gamma B = OCB - CO\gamma$.

Eben so ist auch $B\gamma H = BCH - CH\gamma$; also der Fehler

$$OCH - (OCB - CO\gamma + BCH - CH\gamma) = CO\gamma + CH\gamma.$$

Verlängert man OC und fällt aus γ einen Perpendikel γd auf die Verlängerung; bezeichnet ferner $OC = r$; $C\gamma = e$; $OCB = \alpha$; $BCH = \varphi$; so ist tangens $CO\gamma = d\gamma : dO$; ferner $dC\gamma = OCB = \alpha$; mithin $d\gamma = e\,\mathrm{Sin}\,\alpha$; $dC = e\,\mathrm{Cos}\,\alpha$; sonach

$$\mathrm{tang}\,CO\gamma = \frac{e\,.\,\mathrm{Sin}\,\alpha}{r + e\,\mathrm{Cos}\,\alpha};\quad \mathrm{tang}\,CH\gamma = \frac{e\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{r + e\,\mathrm{Cos}\,\varphi}.$$

Folglich der Fehler, welchen die Excentricität in den Bogen bringt, in Secunden

$$\left(\frac{e\,\mathrm{Sin}\,\alpha}{r + e\,\mathrm{Cos}\,\alpha} + \frac{e\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{r + e\,\mathrm{Cos}\,\varphi}\right) 206264.$$

Weil nun hier $e\,\mathrm{Cos}\,\alpha$ und $e\,\mathrm{Cos}\,\varphi$ gegen r immer nur äußerst klein sind, so ist auch jener Fehler

$$\frac{e}{r}(\mathrm{Sin}\,\alpha + \mathrm{Sin}\,\varphi) = \frac{2e}{r}.\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(\varphi - \alpha)\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\alpha + \varphi)\,206264.$$

Setzt

Setzt man den Winkel OCH $= \psi$, so ist $\varphi = \psi - \alpha$; mithin auch jener Fehler

$$\frac{2e}{r} . \text{Cos} \tfrac{1}{2}(\psi - 2\alpha) . \text{Sin} \tfrac{1}{2}\psi . 206264.$$

Nun hatte der Quadrant 8 Zolle oder $\frac{2}{3}$ Fuß Halbmesser; und für ihn war der Directionswinkel der Excentricität $\alpha = 30$ Grade.

Will man nun die Folgen berechnen, welche seine Excentricität von $\frac{1}{5000} = e$ Fuß auf einen Winkel ψ von 60 Graden hat, so sind diese

$$2 . \frac{1}{5000 . \frac{2}{3}} \tfrac{1}{2} . 206264 = \frac{3}{10000} . 206264 = 61{,}879 \text{ Sec.}$$

Aus diesen Betrachtungen überzeuget man sich, was für einen außerordentlichen Einfluß auch eine sehr schwache Excentricität eines Sextanten auf die mit ihm gemessene Winkel habe; es verhält sich der Fehler für den nemlichen Sextanten und gemessenen Winkel, wie seine Excentricität selbst. Der Fehler wäre für einen Winkel von 60 Graden schon 30,9 Secunden, wenn seine Excentricität nur $\frac{1}{10000}$ Fuß oder $\frac{1}{100}$ einer Linie wäre, die selbst bey einer 10maligen Vergrößerung des Augenglases sich nur als $\frac{1}{10}$ Linie zeiget.

Wollte man nun annehmen, ein geübtes Ange könne von dieser $\frac{1}{10}$ Linie noch $\frac{1}{5}$ sicher schätzen, so würde dieses unter jener Vergrößerung die Excentricität bis auf $\frac{1}{50000}$ eines Fußes schätzen können; es würde aber nichts destoweniger dieser Theil, für welchen das Auge nicht mehr stehen kann, auf den Winkel von 60 Graden bey diesem Sextanten einen Fehler von 6,1879 Secunden bringen.

Sorgfältige Künstler geben daher ihren Vollkreisen immer zwey an der Alhidade einander gegenüber stehende Nonien, damit sie sich nicht auf die Concentricität ihrer Theilmaschiene verlassen, sondern nach dem in (I.) angeführ-

führten Verfahren die Concentricität jener Kreise so genau als immer möglich ist, herstellen, und nachgehends das Centrum selbst fixiren können.

Dieses sichere Verfahren ist bey Sextanten nicht anwendbar, weil sie nur einen Nonius haben können: es bleibt für die Prüfung ihrer Concentricität nur das eben betrachtete Verfahren übrig, dieselbe aus dem Parallelismus des Ganges des Nonii mit dem Theilriß zu vergleichen; das aber immer keine große Zuverlässigkeit gewähren kann, weil der Theil, für welchen man in jenem Parallelismus nicht stehen kann, immer noch bedeutenden Einfluß auf die mit den Sextanten gemessenen Winkel hat.

Der Vollkreis hat daher auch rücksichtlich der Herstellung seiner Concentricität, vor dem Quadranten und Sector einen großen Vorzug.

c. Uebrigens ist auch rücksichtlich der Prüfung der Eintheilung eines Sextanten das in (XVI.) angeführte Verfahren anwendbar.

§. 6.

Reductionen gemessener Winkel.

Ehe der Geograph die mit dem Geodolithen oder auch mit dem Bordaischen Vollkreis gemessene Winkel für die Berechnung seines sphärischen, über das aufgenommene Land verbreiteten Netzes gebrauchen kann, muß er mit denselben zuvor verschiedene Veränderungen oder Reductionen vornehmen, die von den Umständen abhängen, unter welchen er diesen oder jenen Winkel aufnehmen mochte.

Reduction eines Winkels auf die das Ellipsoid osculirende Sphäre.

I. Unter diesen ist nun immer die erste, obwohl unbedeutendste, die Reduction des Winkels auf die osculirende Sphäre.

Der Geograph construiret nemlich, wie in der Folge ausgeführt werden wird, sein sphärisches Dreyecknetz für eine Sphäre, deren Halbmesser dem Erdhalbmesser §. 2. III. des Ortes gleich ist, dessen Meridian er für den ersten des aufgenommenen Staates ansiehet; von welchem aus er deswegen auch die Coordinaten aller übrigen Orte berechnet, welche die Primär- und Secondär-Dreyecke seines Dreyecknetzes abgeben.

Es sey nun in Fig. (15.) B dieser Ort, dessen geographische Breite BUA = α und sein Erdhalbmesser Bo = ϱ in der Richtung seiner Schwerlinie ist.

Stellet nun der Geograph seinen Geodolithen allda horizontal auf, so macht seine Ebene mit der Schwerlinie Bo dieses Ortes einen rechten Winkel; es mag nun der Ort selbst an der Oberfläche der See, oder statt dessen auf einer Bergspitze sich befinden, deren Schwerlinie in die Richtung oB fällt.

Wird statt dessen das Instrument in D aufgestellt, dessen geographische Breite ($\alpha + \Delta\alpha$) ist, so macht seine Ebene mit der Schwerlinie DM dieses Orts zwar wieder einen rechten Winkel; während sie mit der Horizontalebene der osculirenden Sphäre vom Halbmesser OB, einen Winkel ODM macht, um welchen die Schwerlinie DM des Ellipsoids von der Centrallinie DM abweicht.

Der Geograph begehet daher in der Aufnahme des Winkels in D einen Fehler, der jenem gleich ist, welchen er begehen würde, wenn die Fiduciallinie seines Instruments einen Winkel ODM mit dem Horizonte macht, wäh-

während seine Linie von 90 bis 180 sich genau in der Horizontalebene befindet.

Nun ist aber in dem Dreyeck ODM;

$$\text{tang ODM} = \frac{\text{OM.Sin OMD}}{\text{DM} - \text{OM Cos OMD}}\text{; oder}$$

$$\text{ODM} = \frac{\text{OM. Sin OMD}}{\text{DM}}\text{. 206265 beinahe.}$$

In dieser Formel ist $OM = CM - CO$;

$OMD = 90 - (\alpha + \Delta\alpha)$; ferner nach §. 2. III.

$DM = a : \sqrt{(1 - \varepsilon^2 . \text{Sin}^2 . (\alpha + \Delta\alpha))}$;

$CM = a . \varepsilon^2 . \text{Sin}(\alpha + \Delta\alpha) : \sqrt{(1 - \varepsilon^2 . \text{Sin}^2 . (\alpha + \Delta\alpha))}$.

Diesem Winkel $ODM = \psi$ sey nun in Fig. (13.) der Winkel FEB gleich, um welchen die Ebene des Instruments in seiner horizontalen Stellung, von der auf den Halbmesser OD der osculirenden Sphäre senkrechten Stellung abweichet, während seine Linie EQ von 90 bis 180 sich ganz in der Horizontalebene des Ortes B sich befindet.

In dieser Stellung befindet sich also der Anfangspunct der Eintheilung des Limbi in B, statt daß er sich in F befinden sollte; oder er liegt um FB unter der auf OD in Fig. (8.) senkrechten Ebene.

Mißt nun der Geograph den Winkel BCH, so liest er auf dem Limbus den Bogen HB ab; statt dessen das wahre Maaß dieses Winkels der Bogen Hh ist; er fehlet also hier um einen Winkel, welcher dem Ueberschuß des Bogens BH über den Hh in dem Centro des Instruments zukommt.

Ziehet man den Bogen Hh parallel mit EF, und setzt $HB = a$; $Hh = c$; so ist auch $hHB = \psi$; und in dem bey h rechtwinklichten sphärischen Dreyeck BhH

$\text{tang Hh} = \text{tang HB} . \text{Cos hHB}$; oder $\text{tang } c = a . \text{Cos } \psi$.

Setzt

Setzt man ferner $c = (a - x)$, so ist auch

$$\text{tang}\,(a-x) = \frac{\text{tang}\,a - x}{1 + x\,.\,\text{tang}\,a};$$

weil x immer äußerst klein ist; mithin auch

$$-x + \text{tang}\,a = \text{tang}\,a\,.\,\text{Cos}\,\psi + x\,.\,\text{tang}\,a^2\,\text{Cos}\,\psi;$$

und hieraus

$$x = \frac{\text{tang}\,a\,.\,(1 - \text{Cos}\,\psi)}{1 + \text{tang}\,a^2}.$$

Weil nun $1 - \text{Cos}\,\psi = 2\,\text{Sin}^2\,\frac{1}{2}\psi$; und $1 + \text{tang}\,a^2 = \text{Sec}\,.\,a^2 = \frac{1}{\text{Cos}\,a^2}$; $\text{tang}\,a\,.\,\text{Cos}\,a = \text{Sin}\,a$; und $\text{Sin}\,a\,.\,\text{Cos}\,a = \frac{1}{2}\,\text{Sin}\,2a$ ist; so ist auch, weil ψ immer klein nur ist,

$$x = \tfrac{1}{4}\psi^2\,.\,\text{Sin}\,2a\,.\,206265.$$

So groß würde also der Bogen x für den Halbmesser $= 1$ seyn; er ist daher für den Halbmesser $= r$ des Instruments $= \eta$; und

$$\eta = \tfrac{1}{4}\psi^2\,r\,.\,\text{Sin}\,2a\,.\,206264.$$

Um dieses durch ein Exempel zu erläutern, setze ich das Axen-Verhältniß unsers Erdellipsoids $1 : \mu = 333 : 334$; so ist $\mu = \frac{3}{3}\frac{3}{3}\frac{3}{4}$; $\varepsilon^2 = 1 - \mu^2 = 0{,}005979058$; $\log \varepsilon^2 = 0{,}7766329 - 3$.

Ferner ist der Halbmesser des Aequators $a = 68045305$ Meter; und $\log a = 6{,}8045305$.

Nun sey ferner die geographische Breite des Ortes B $= 48'_{,,}24 = \alpha$; des Ortes D aber $53°_{,,}36 = \alpha + \Delta\alpha$; mithin $\Delta\alpha = 5°_{,,}12$; so ist einmal

log

$\log \varepsilon^2 = 0{,}7766329 - 3.$	$\log \varepsilon^2 = 0{,}7766329 - 3.$
$\text{l. Sin } \alpha^2 = 19{,}7475688 - 20.$	$\text{l. Sin}^2(\alpha+\Delta\alpha) = 19{,}8114772 - 10.$
$4{,}5242017 - 7.$	$4{,}5881101 - 7.$
$0{,}0033435.$	$0{,}0038736.$
1	1
$0{,}9966565.$	$0{,}9961264.$
$5{,}9985455 - 6.$	$5{,}9983144 - 6.$
$4{,}9992728 - 5.$	$4{,}9991572 - 5.$
$\sqrt{(1-\varepsilon^2 . \text{Sin } \alpha^2)} = 0{,}99833.$	$0{,}99806. = \sqrt{(1-\varepsilon^2 . \text{Sin}^2(\alpha+\Delta\alpha))}$
$\log a = 6{,}8045305.$	$\log a = 6{,}8045305.$
$\log \varepsilon^2 = 0{,}7766329 - 3.$	$\log \varepsilon^2 = 0{,}7766329 - 3.$
$\text{l. Sin } \alpha = 9{,}8737844 - 10.$	$\text{l. Sin}(\alpha+\Delta\alpha) = 9{,}9057386 - 10.$
$4{,}4549478.$	$4{,}4869020.$
$4{,}9992728 - 5.$	$4{,}9991572 - 5.$
$\log CO = 4{,}4556750.$	$\log CM = 4{,}4877448.$
$CM = 28555.$ Meter.	$CM = 30743.$

$$OM = 30743 - 28555 = 2188. \text{ Meter.}$$

$$\log a = 6{,}8045305.$$
$$\log . \sqrt{1 - \varepsilon^2 . \text{Sin}(\alpha+\Delta\alpha)} = 9{,}9057386 - 10.$$
$$6{,}8987919.$$
$$DM = 7221100. \text{ Meter.}$$

End=

Endlich Sin CMD = Sin(90—(α+Δα)) = Cos(α+Δα);
und

log OM = 3,3400473.
l. Cos (α+Δα) = 9,7733614—10.
l. 206265 = 5,3144252.

8,4278339.
6,8987919.

log ODM = 4,5290420—0.
ODM = 33,810 Secunden = ψ.

Um so viel würde also die Horizontalebene des Ellipsoids, von der Horizontalebene seiner osculirenden Sphäre an der Stelle D abweichen.

Nehme ich nun an, der Geograph habe mit seinem in der Horizontalebene des Ellipsoids stehenden Geodolithen einen Winkel von 60 Graden gemessen, so ist hier a′ = 60; mithin für den Halbmesser r = ⅔ Fuße.

log ψ² = 12,4193954—20.
log Δ = 0,6020600.

11,8173354—20.
log r = 0,8039087— 1.
log Sin ε a′ = 9,9375306—10.
log 206265 = 5,3144252.

log η = 4,8931999— 8.
η = 0,00078199. Secunden.

Ich habe hier die Rechnung nach aller Schärfe geführt, und die Breiten-Differenz Δα so groß angenommen, als sie nur in seltenen Fällen bey geographischer Aufnahme der Länder vorkommen kann: um desto besser zu überzeugen, daß der Fehler immer unspürbar seye, der daraus entstehet, daß das Instrument seines Orts in der Horizontalebene der Ellipsoide, und nicht in der Horizontalebene der osculirenden Sphäre stehet, auf welche der Geograph immer sein Triangularnetz reduciret.

Reduction eines schiefen Winkels auf seine Horizontalebene.

II. Nimmt der Geograph seine Winkel mit einem Winkelmesser, dessen Fernrohr keine Kippe hat, oder nicht auf und nieder beweglich ist, wie z. E. bey dem Bordaischen Kreis, oder auch wenn er mit einem Spiegelsextanten operiret; so entübriget er sich zwar aller der verschwindend kleinen Fehler, welche die horizontale Stellung des Limbi, und der verticale Gang des Fernrohrs auf diesem, in seine Beobachtungen nach Umständen bringen kann: aber er siehet sich bemüssiget, den Limbus immer in die schiefe Ebene zu bringen, in welcher der Mittelpunct seines Instruments, und die Gegenstände P und Q sich befinden, für welche er den Winkel seines Orts mißt, und die Arbeit selbst, wird dadurch sehr verzögert: man nimmt mit dem Geodolithen in der nemlichen Zeit 10mal mehr Winkel als mit jenen Instrumenten.

Es sey z. E. der Mittelpunct des Instruments in D; aDb eine Hortzontalebene durch denselben; DC seine Verticallinie; und AD„DB„ die Richtungen der Axe des festen Fernrohrs, nach zweien entfernten Gegenständen A und B. Fig. 16. Tab. II.

Leget man durch diese Richtungen zwey Verticalebenen DCAa und DCBb, so congruiren diese in der Linie DC, und schneiden die Horizontalebene in den Linien aD und bD; der Winkel aDb ist daher der Horizontalwinkel, welchen die Verticalebenen durch diese Gegenstände in D mit einander machen; statt dessen der Geograph mit seinem Instrument den schiefen Winkel ADB mißt, der in diesem Fall kleiner als aDb ist; er muß deswegen seinen gemessenen Winkel, auf diesen vorerst reduciren.

Diese Reduction ist nun immer etwas mühsam, wenn der Elevationswinkel aDA und bDB bedeutend sind; sie wird einfacher, wenn sie wenigstens nicht größer sind, als

als daß man ihre Sinus und Tangenten, mit ihren Bogen selbst, ohne merklichen Fehler verwechseln kann. Rücksichtlich dessen setze ich nun hier die Elevationswinkel $aDA = H$, und $bDB = h$; den gemessenen Winkel $ADB = c$, und den horizontalen $aDb = C$.

Nun ist in dem sphärischen Dreyeck ABC, aus seinen bekannten 3 Seiten AC„BC„AB, oder b„a„c

$$\text{Sin}^2 . \tfrac{1}{2} C = \frac{\text{Sin}\,\frac{1}{2}.(c+b-a).\text{Sin}\,\frac{1}{2}(c+a-b)}{\text{Sin}\,a\,.\,\text{Sin}\,b\,.}.$$

Für diesen Fall, in welchem beide Gegenstände elevirt sind, ist aber $BC = a = 90 - h$; $AC = b = 90 - H$; mithin auch

$$\text{Sin}^2 . \tfrac{1}{2} C = \frac{\text{Sin}\,\frac{1}{2}(c-H+h).\text{Sin}\,\frac{1}{2}(c+H-h)}{\text{Cos}\,H\,.\,\text{Cos}\,h\,.}.$$

Sind statt dessen die Gegenstände A und B um die Winkel $\alpha Da = H$ und $\beta Db = h$ deprimirt; so bringt der Geograph sein Instrument in die Ebene $\alpha D\beta$; und es ist nun in dem sphärischen Dreyeck $\alpha C\beta$; $C\alpha = 90 + H$; und $C\beta = 90 + h$; mithin

$$\text{Sin}^2 . \tfrac{1}{2} C = \frac{\text{Sin}\,\frac{1}{2}(c+H-h).\text{Sin}(c+h-H)}{\text{Cos}\,H.\ \text{Cos}\,h.}.$$

Man erhält daher auch für diesen Fall den horizontalen Winkel aDb, wenn man in der vorigen Formel, die Winkel H und h negativ setzt. Wäre daher der Gegenstand B um b inclinirt, und der A um H elevirt, so ist nach obiger Formel auch

$$\text{Sin}^2 . \tfrac{1}{2} C = \frac{\text{Sin}\,\frac{1}{2}(c-(H+h)).\text{Sin}\,\frac{1}{2}(c+H+h)}{\text{Cos}\,H\,.\,\text{Cos}\,h\,.}.$$

Lieget einer oder der andere Gegenstand in der Horizontalebene selbst, so ist für einen solchen H, oder $h = o$; und es lässet sich daher nach jener Formel, der Horizontalwinkel für alle mögliche Fälle berechnen.

Man findet übrigens nach derselben den Horizontalwinkel C. durch unsere Logarithmen bis auf einzelne Secunden genau genug, wenn die Winkel H und h, mehrere Grade messen. Wenn aber diese Winkel nur sehr klein sind, so reichen unsere Logarithmen nicht mehr zu, den Horizontalwinkel aus dieser Formel, mit jener Schärfe zu berechnen, mit welcher der Geograph denselben bedarf. Für solche Fälle construire ich deswegen auf dem Wege der Näherung eine Formel, welche den Horizontalwinkel genauer ergiebt.

Ich setze nemlich den Horizontalwinkel $C = c + x$; wo x den äußerst kleinen Winkel bedeutet, um welchen der Horizontalwinkel größer, als der schief gemessene Winkel (c) ist; und lege nun die Formel der Sphärik zum Grunde

$$\text{Cos}\,C = \frac{\text{Cos}\,AB - \text{Cos}\,BC.\,\text{Cos}\,AC.}{\text{Sin}\,BC.\,\text{Sin}\,AC.}$$

Ist nun $AC = 90 - H$; $BC = 90 - h$; $aDb = bCa = C + x$; so ist auch

$$\text{Cos}\,C = \frac{\text{Cos}\,c - \text{Sin}\,h.\,\text{Sin}\,H}{\text{Cos}\,h.\,\text{Cos}\,H} = \text{Cos}\,c.\,\text{Cos}\,x. - \text{Sin}\,c.\,\text{Sin}\,x.$$

Weil aber für den oben bedungenen Fall der Winkel x immer äußerst klein ist, so kann man ohne Fehler $\text{Sin}\,x = x$; und $\text{Cos}\,x = 1$ setzen; und es ist sonach

$$\text{Cos}\,c - x\,\text{Sin}\,c = \frac{\text{Cos}\,c - \text{Sin}\,h.\,\text{Sin}\,H}{\text{Cos}\,h.\,\text{Cos}\,H};$$ oder

$$x.\text{Sin}\,c.\text{Cos}\,h.\text{Cos}\,H = (\text{Cos}\,h.\,\text{Cos}\,H + 1)\,\text{Cos}\,c + \text{Sin}\,h.\,\text{Sin}\,H.$$

Da nun $\text{Cos}\,H = 1 - 2\,\text{Sin}^2\,\frac{1}{2}H$; und

$\text{Sin}\,h.\,\text{Sin}\,H = \frac{1}{2}\,\text{Cos}\,(H - h) - \frac{1}{2}\,\text{Cos}\,(H - h)$ ist, so ist auch

$\text{Cos}\,h.\,\text{Cos}\,H - 1 = -\text{Sin}^2.\frac{1}{2}(H + h) - \text{Sin}^2.\frac{1}{2}(H - h)$; und

$\text{Sin}\,h.\,\text{Sin}\,H = \text{Sin}^2.\frac{1}{2}(H + h) - \text{Sin}^2.\frac{1}{2}(H - h)$;

mithin auch

$$x.\text{Sin}\,c.\text{Cos}\,h.\text{Cos}\,H = \text{Cos}\,c.[-\text{Sin}^2.\tfrac{1}{2}(H + h) - \text{Sin}^2.\tfrac{1}{2}(H - h) + \text{Sin}^2.\tfrac{1}{2}(H + h) - \text{Sin}^2.\tfrac{1}{2}(H - h)];$$

$$= \text{Sin}$$

$= \text{Sin}^2.\frac{1}{2}(H+h)(1-\text{Cos}\,c) - \text{Sin}^2.\frac{1}{2}(H-h)(1+\text{Cos}\,c)$;

$= \text{Sin}^2.\frac{1}{2}(H+h).\text{Sin}\,c.\text{tang}\frac{1}{2}c - \text{Sin}^2\frac{1}{2}(H-h).\text{Sin}\,c.\text{Cot}.\frac{1}{2}c$;

also

$$x = \frac{\text{Sin}^2.\frac{1}{2}(H+h).\text{tang}\frac{1}{2}c - \text{Sin}^2.\frac{1}{2}(H-h).\text{Cot}.\frac{1}{2}c}{\text{Cos}\,h\,.\,\text{Cos}\,H}.206264.$$

und $C = c + x$.

Liegt der Gegenstand B im Horizonte von D, oder ist $h = 0$; so wird für diesen Fall

$$x = -\frac{2.\text{Sin}^2.\frac{1}{2}H\,\text{Cotang}\,c}{\text{Cos}\,H}.206264.$$

Sind beide Gegenstände um die Winkel h und H deprimirt, so behält der Winkel x seinen vorigen Werth; ist aber B elevirt und A deprimirt, oder $aC = 90 + H$, so ist für diesen Fall

$$\text{Cos}\,C = \frac{\text{Cos}\,c + \text{Sin}\,h\,.\,\text{Sin}\,H}{\text{Cos}\,h\,.\,\text{Cos}\,H}; \text{ mithin}$$

$$x = -\frac{\text{Sin}^2.\frac{1}{2}(H+h).\text{Cot}.\frac{1}{2}c + \text{Sin}^2.\frac{1}{2}(H-h).\text{tang}\frac{1}{2}c}{\text{Cos}\,h\,.\,\text{Cos}\,H}.206264.$$

Bey dem Gebrauch eines solchen Instruments muß daher der Geograph mit einem Höhenmesser versehen seyn, mit welchem er die Elevations- und Inclinations- oder Depressionswinkel messen kann; oder sein Instrument selbst muß sich auch in die verticale Lage stellen lassen können, um mit ihm jene Winkel selbst messen zu können; wornach also die Arbeiten auf jedem Standpunct um so aufhaltsamer und wegen der veränderlichen irdischen Refraction etwas unsicher werden müssen.

Auch verstehet es sich dabey an und für sich, daß man bey Messung der Höhenwinkel das Fernrohr nur nach jener Stelle richtet, an welcher auf dem entfernten Gegenstande das Instrument aufgestellt werden kann; in soferne man die Localitäten des Gegenstandes bereits kennet.

Wo dieses nicht ist, muß man nachgehends den nach der Spitze eines Thurms A in B gemessenen Höhenwinkel um einen Winkel reduciren, dessen Tangente dem Quotienten gleich ist, den man erhält, wenn man den Abstand des Standpuncts auf den Thurm A von seiner Spitze, durch den Abstand des A von dem B dividirt.

Ausgleichung eines Horizontalwinkels nach der Construction des Winkelmessers.

III. Wären die Theilung der Limbi und der Nonien eines Winkelmessers, ohne allen Fehler oder durchaus mathematisch richtig, er selbst ganz concentrisch, seine Fernröhren ohne alle Abweichung, ihre Fäden in der richtigen Stellung, und der Limbus aufs genaueste horizontal gestellt, — so kann nichts destoweniger der Beobachter nach Betrachtungen §. 3. in dem Ablesen des Winkels, und in der Richtung des Fernrohrs nach dem Gegenstande, durch sein Augenmaaß einen kleinen Fehler begehen: es ist dabey möglich, daß sich der eine gegen den andern zum Theil, oder ganz aufhebt; oder es ist eben so auch möglich, daß beide Fehler auf eine Seite fallen; so daß deswegen der Beobachter rücksichtlich des wahren Maaßes des aufgenommenen Winkels, höchstens bis auf die Summen jener zwey kleinen Winkel gewiß ist, um welche er sich in dem Stand der correspondirenden Theilstriche des Limbi und Nonii, und in der Stellung des Bildes des Gegenstandes in die Mitte der Fäden des Fernrohrs, verschätzen kann.

Hätte nun das Instrument statt einem, nun vier Nonien, und der Beobachter kann ganz um dasselbe seines Orts herumkommen, so kann er den nemlichen Winkel auch 4 mal ablesen; und es ist dabey eben so wohl möglich, daß sich die bey dem Ablesen unvermeidlichen Fehler

wechsel-

wechselseitig ganz, oder auch nur zum Theil aufheben, als es möglich ist, daß sie in dem unglücklichsten Fall, auch auf eine Seite fallen können.

Nimmt nun der Beobachter aus den 4 abgelesenen Winkeln das arithmetische Mittel, so wird selbst in jenem unglücklichsten Fall, sein Winkelmaaß durch die 4 Nonien eben so sicher bestimmt, als es bestimmt werden könnte, wenn das Instrument nur einen Nonius hätte; weil das 4fache des Fehlers durch die Division mit 4 wieder zum Einfachen wird.

Ob nun wohl dieser Fall möglich ist, so ist es doch immer wahrscheinlich, daß die unvermeidlichen Fehler bey der Ablesung des Winkels sich wechselseitig, wenigstens durch plus und minus zum Theil aufheben werden; mithin ein Instrument die Winkel um so zuverlässiger messen werde, je mehr es Nonien hat.

Ich habe deswegen bey den Instrumenten, welche ich sonst verfertigte, 8 Nonien für die 90 und 96 Theilung, und außerdem noch an der Alhidade vorne und hinten ein feines Haar angebracht, das vermittelst eines Schraubenmikrometers Theile des Limbi anzeigte; so daß man also den genommenen Winkel 10 mal auf dem Limbus ablesen konnte.

Außerdem gewähret dieses noch den Vortheil, daß, da der Limbus von allen Seiten gleichzeitig gebraucht wird, auch die kleinen Fehler, welche von einer unmerklichen Excentricität herkommen, sich gegen einander aufheben: ja selbst, wenn ein oder der andere Theilstrich auf dem Limbus nicht ganz sicher wäre, so wird der daraus entstehende Fehler durch das arithmetische Mittel verkleinert; oder wenigstens entdeckt.

Reduction eines Winkels wegen Veränderlichkeit der Signale.

IV. Die Signale, welche der Geograph aufstellet, §. 3., sind außer den Beschädigungen, welche sie öfters durch Menschen erleiden, insbesondere dem Sturm um so mehr ausgesetzt, je heftiger ihres Orts, nach ihrer hohen und freien Exposition die Stürme an und für sich nach Localitäten seyn mögen; sie sind dabey durch den Sturm noch um so mehr gefährdet, je länger oder höher sie sind, und je größer ihre Stoßfläche ist.

Es drücken sich durch die Gewalt des Sturmes selbst die pyramidalen Signale der ersten Classe in etwas seitwärts, wo besonders ihre Wandsäulen einen tiefen und weichen Boden vorfinden; es verlaufet sich an und für sich der vierkantige Baum der Signale der andern Classe durch die Veränderung der Witterungsumstände, gerne in eine Säbelkrümme, wornach der auf ihm stehende Korb, außer der erforderlichen Lothlinie kommt; er bieget sich von derselben noch um so mehr ab, und wird um so krümmer, und selbst an seinem Stammende von der Lothlinie um so abweichender, je mehr er seines Orts dem Sturm ausgesetzt ist.

Diese nachmalige Abweichung eines solchen Signals von der Lothlinie, dessen Lage bereits bestimmt ist, als es noch senkrecht stand, hat nun auf das Maaß der Winkel, welches der Geograph einige Zeit hernach nach demselben nimmt, mehr oder minder bedeutenden Einfluß, je nachdem er dasselbe in kurzer oder weiter Entfernung in einer Richtung siehet, und er außerdem das Signal selbst ganz oder nur zum Theil sehen kann.

Befindet er sich nemlich in der Verticalebene selbst, welche durch die Lothlinie des Baumes, und durch die Mitte seines Korbes und seines vorigen Standes gedacht werden kann, so hat seine schiefe Stellung auf das Winkelmaaß

kelmaaß keinen Einfluß; weil das Signal und das Centrum des Instruments in der Verticale durch seine Lothlinie sich selbst befinden; es hat außerdem keinen Einfluß, wenn der Geograph das ganze Signal bis zu seinem Stammende sehen kann; weil er in diesem Fall das Fernrohr nach dem Stammende zunächst am Boden selbst richtet.

Es ist dagegen der Einfluß eines geneigten Signals auf das Winkelmaaß am größten, wenn nach Localitäten nur sein Korb an der Stelle des Instruments sichtbar ist, und die Ebene durch dasselbe und durch den Korb, und seiner vorigen Stelle mit der Verticale des Signals einen rechten Winkel macht.

Es sey in Fig. 17. der Punct P der Mittelpunct des Korbs eines Signals der andern Classe, wenn dieses noch genau lothrecht stehet, und (p) sein Mittelpunct in der Stellung, welche das Signal nachgehends erhalten hat, in welcher es um Pp aus der Lothlinie gewichen ist, in einer Richtung, die mit der Verticalebene durch PC den Winkel $CPp = \omega$ macht.

Nun habe der Geograph die Distanz PC aufs genaueste bestimmt, in Umständen, unter welchen das Signal noch genau lothrecht stund; und erst nachgehends, nachdem es um Pp außer dem Loth gekommen ist; bedienet sich der Trigonometer der Distanz PC, für die Seite eines secondären Dreyecks PCK, in welchem er aus PC und den Winkeln $pCK = \alpha$, und $pKC = \beta$ die Seite CK berechnet.

In diesem Zustand mißt daher der Trigonometer den Winkel pCK, der um $PCp = x$ zu klein ist; er mißt eben so in K den Winkel pKC, der um $pKP = \eta$ kleiner als PKC ist.

Nach dieser Winkelaufnahme findet er daher

$$CK = CP \,.\, \mathrm{Sin}\,(\alpha+\beta) : \mathrm{Sin}\,\beta;$$

statt

statt dessen der wahre Abstand beider Stellen C und K sich zu $CP.\mathrm{Sin}(\alpha+\beta+x+\eta) : \mathrm{Sin}(\beta+\eta)$ ergeben sollte: er fehlet daher durch die Abweichung des Signals aus seiner lothrechten Richtung, in der Distanz CK um

$$CP\left(\frac{\mathrm{Sin}(\alpha+\beta+x+\eta)}{(\mathrm{Sin}(\beta+\eta)} - \frac{\mathrm{Sin}(\alpha+\beta)}{\mathrm{Sin}\,\beta}\right).\ \text{Fuße.}$$

Nun ist aber in dem Dreyeck PCp aus PC„Pp; CPp

$$\mathrm{tang}\ x = \frac{Pp.\mathrm{Sin}\,\omega}{PC - Pp\,\mathrm{Cos}\,\omega} = \mathrm{tang}\ PCp.$$

Ist aber Pp gegen PC nur sehr klein; so ist auch ohne merklichen Fehler

$$x = \frac{Pp.\mathrm{Sin}\,\omega}{PC}.206265.$$

Ferner ist in dem Dreyeck PCp; $Cp = \frac{PC.\mathrm{Sin}\,\omega}{\mathrm{Sin}(x+\omega)}$; im Dreyeck CpK ist $Kp = Cp.\mathrm{Sin}\,\alpha : \mathrm{Sin}\,\beta$; und im Dreyeck PpK ist $PpK = 180 - LpK$; $LpK = CpK - CpL = 180 - (\alpha+\beta+\omega+x)$; mithin $PpK = (\alpha+\beta+x+\omega)$; woraus sich der Winkel $\eta = PKp$ aus den Seiten Pp„Kp und dem Winkel PpK berechnen lässet.

Es habe z. E. der Geograph die Seite CP zu 75000 Fußen bestimmt, und das Signal habe sich nachgehends um $Pp = 1\frac{1}{2}$ Fuße außer der Lothlinie gezogen, die mit PC einen Winkel von 56 Graden macht, als der Trigonometer die Winkel $pCK = 45°„36'$ und $pKC = 36°„24'$ mißt, um hieraus die Seite CK zu bestimmen.

Hier ist also $PC = 75000$; $Pp = 1\frac{1}{2}$ Fuße; $\omega = 56°„0'$; $\alpha = 45°„36'$; $\beta = 36°„24'$.

log

log P p = 0, 1760913.	log P C = 4, 8750613.
l. Sin ω = 9, 9185742—10.	l. Sin α = 9, 8539856—10.
l. 206265 = 5, 3144252.	14, 7290469—10.
5, 4090907.	l. Sin β = 9, 7733614—10.
log P C = 4, 8750613.	4, 9556855.
log x = 4, 5340294— 4.	K p = 90300 beinahe.
x = 3, 4200. Sec.	

90300	α + β + x + ω = 138„ 0„ 3„42.
1, 5	180„
90301, 5	41„58„56.
90298, 5	20„59„28.

90301, 5 : 90298, 5 = tang 20„59„28 : tang n.

log 90298, 5 = 4, 9556805.
l. tang 20°„ = 9, 5839759—10.
14, 5396564—10.
l. 90301, 5 = 4, 9556950.
9, 5839604—10.
n = 20°„59„25.
20„59„28.
41„58„53 = pPK.
— —„ 3 = PKp = n.

log CP = 4, 8750613.	log PC = 4, 8750613.
l. Sin(α+β+x+n) = 9, 9957546—10	l. Sin(α+β) = 9, 9957928—10
14, 8708159—10	14, 8708141—10
l. Sin (β+n) = 9, 7733699—10	l. Sin β = 9, 7733614.
5, 0974460.	5, 0974527.
125154, 35.	125156, 28.

125154, 35.
125156, 28.

Fuße. 1, 93.

Nach

Nach dieser mit aller Schärfe geführten Rechnung würde daher der Trigonometer die Seite CK um 1,93 Fuße zu groß bestimmen.

Fällt der Standpunct K in L, oder in die Verticalebene durch L„p„P, so ist der Winkel ν = 0; mithin der Fehler in der Seite CL geringer als zuvor.

Es muß daher dem Geographen alles daran liegen, sich von dem unveränderten Stand seiner Signale, so oft als immer möglich ist, zu versichern.

Rücksichtlich dessen ist es nun immer sehr zweckmäßig, wenn die Gemeinden, auf deren Fluren Signale stehen, so wie das Policey- Forst- und Jagdpersonale die Weisung erhalten, auf der Stelle die Anzeige bey dem einschlagenden Amte zu machen, wenn in dem Stande eines Signals eine Veränderung bemerkt wird; damit dieses davon sogleich der Stelle des Geographen hievon Notiz giebt, welche denselben hievon benachrichtiget; damit er seines Orts, die Einleitung für die Herstellung des Signals treffen kann.

Er selbst aber attendiret auf jeder Station, wo er Winkel aufnimmt, und Signale sehen kann, den Stand derselben, ob sie ihm in dem Fernrohr nicht geneigt erscheinen; er trift sogleich die Verfügung für die Aufrichtung eines Signals, das sich gesenkt zu haben scheint.

Eben so notiret auch der Geograph solche Thürme in sein Manuale, deren Spitzen ihm gegebenen Orts, in geneigter Lage erscheinen.

Reduction eines Winkels wegen veränderlicher Erleuchtung der Signale und anderer Gegenstände.

V. Wird ein entfernter Gegenstand, zu einer Zeit durch ein Fernrohr betrachtet, um welchen die Sonne durch Wolken bedeckt ist, so zeiget er sich in demselben in

seinem ganzen, auf die Seheaxe senkrechten Querschnitt, in einer Deutlichkeit, die seiner Erleuchtung durch die Atmosphäre, seines Orts zukommt: er zeiget sich in dem nemlichen Querschnitt, wenn er directe von der Sonne erleuchtet wird, wobey das Fernrohr, die Sonne und der Gegenstand in einerley Verticalebene sich befinden, und der Beobachter die Sonne in seinem Rücken hat: er zeiget sich dabey um so deutlicher, je weniger sein Bild blendet.

Dieser Querschnitt aber ändert sich, für ein Object, das sich als ein blos durch die Atmosphäre erleuchtetes sehr undeutlich präsentiret, er wird kleiner, wenn die Sonne den Gegenstand seitwärts erleuchtet, und er selbst so weit von dem Fernrohr abstehet, daß dem Auge der von der Sonne nicht unmittelbar erleuchtete Theil verschwinden muß: es begehet deswegen der Geograph in der Richtung des Fernrohrs einen Fehler, dadurch, daß er die Mitte des erleuchteten Theils für die Mitte des Ganzen hält.

Es stelle in Fig. 18. der Kreis AFBK den horizontalen Durchschnitt eines runden Thurms, oder auch der Kuppel, oder auch nur des Knopfes eines andern vor, der im Fernrohr noch gesehen wird.

Der Beobachter befinde sich in O, und die Strahlen der Sonne fallen nach der Richtung SC auf den runden Gegenstand.

Fielen nun diese directe, oder nach der Richtung OC auf den Gegenstand, so würde der Beobachter denselben in seiner ganzen ortographischen Projection AB in dem Fernrohr sehen; statt dessen nach dem gegebenen Stand der Sonne die halbe Seite DBK erleuchtet wird: es siehet daher der Geograph von dem Gegenstande zunächst seine von der Sonne erleuchtete Phase DFB, in der Projection LB; er siehet gleichzeitig die blos von der

Atmo-

Atmosphäre erleuchtete Phase AD, deren Projection die Linie AL ist.

Je größer nun die Erleuchtung der Phase DFB, in Vergleich mit der Phase AD ist, um so weniger deutlich siehet er die letztere neben der andern; er siehet sie gar nicht mehr, oder sie ist seinem Auge verschwindend, wenn der Gegenstand so weit entfernt ist, daß selbst die von der Sonne erleuchtete Phase DFB, nur durch ihr spiegelndes Licht dem Auge noch sichtbar wird.

a. In diesen letztern Fall nun siehet der Geograph den Gegenstand nur noch in seiner ortographischen Projection LB; er richtet deswegen die Axe des Fernrohrs nach der Mitte N derselben, und verfehlet dadurch die wahre Mitte C. des Gegenstandes um den Theil CN.

Stehet der Gegenstand um D. Fuße von dem Standpunct O ab, so fehlet der Geopraph in dem Winkel POC, um den kleinen

$$\text{Winkel } \frac{CN}{D} . 206264 ;$$

oder er mißt in diesem Fall den Winkel um diesen kleinen Winkel zu groß.

Dieser Winkel lässet sich folgendermaßen ausmitteln. Es ist nemlich einmal $NB = \frac{1}{2}LB$; und $CN = CB - NB$. $= CB - \frac{1}{2}LB$; ferner $LB = 2BC - AL$; mithin $CN = CB - \frac{1}{2}.(2BC - AL) = \frac{1}{2}AL$.

Nun ist ferner $AL = \text{Sin. verf. } ACD = 2AC.\text{Sin}^2.\frac{1}{2}AED$; und $ACD = ECH$; also auch $AL = 2AC.\text{Sin}^2.\frac{1}{2}ECH$.

Bezeichnet nun x den Winkel, um welchen der Geograph in diesen Umständen in dem aufgenommenen Winkel fehlet, so ist

$$x = \frac{AC.\text{Sin}^2.\frac{1}{2}ECH}{D} . 206264.$$

Dabey findet der Geograph den Winkel ECH sehr nahe, wenn er an seiner Station O, sogleich nach Aufnahme

nahme des Winkels PON das Fernrohr in die Richtung OZ nach der Sonne richtet, und so den Winkel NOZ unmittelbar mißt.

Es ist nemlich der Winkel $VOZ = ECH$; weil wegen der großen Entfernung der Sonne die Linie OZ beinahe parallel mit CS ist. Setzt man nun $AC = r$ und $180 - NOZ = \psi$; so ist $VOZ = ECH = \psi - x$; mithin

$$x = \frac{r}{D} \cdot \mathrm{Sin}^2 \cdot \tfrac{1}{2}(\psi - x).$$

Da nun x immer sehr klein ist, so kann man $\mathrm{Sin}\, x = x$ und $\mathrm{Cos}\, x = 1$. setzen; und es ist deswegen auch

$$x = \frac{r}{2D} \cdot (1 - \mathrm{Cos}\, \psi - x) = \frac{r}{2D} \cdot (1 - (\mathrm{Cos}\, \psi + x \mathrm{Sin}\, \psi));$$

oder

$$x = \frac{r}{2D} \cdot \frac{1 - \mathrm{Cos}\, \psi}{1 - \frac{r \mathrm{Sin}\, \psi}{D}} = \frac{r}{2D} \cdot \frac{\mathrm{tang}\, \frac{1}{2}\psi \cdot \mathrm{Sin}\, \psi}{1 - \frac{r \mathrm{Sin}\, \psi}{2D}} \cdot 206264.$$

Es sey z. E. der Gegenstand die runde Kuppel eines Thurms, welche sich dem Geographen durch ihr spiegelndes Licht in dem Fernrohr zeiget: ihr Halbmesser ist 10 Fuße, und ihr Abstand $D = 60000$ Fuße.

Auch habe der Geograph den Winkel $NOZ = 120$ Grade gemessen, indem er in der Richtung seines Fernrohrs nach der Sonne einen Faden senkrecht aufgehangen hatte.

Hier ist also der Winkel $\psi = 180 - 120 = 60$ Grade; $r = 10$; $D = 60000$ Fuße; und

$\log r = 1{,}0000000.$	$\log 2D = 5{,}0791812.$
$\log \mathrm{tang}\, \frac{1}{2}\psi = 9{,}7614394 - 10.$	$\mathrm{l.}\, 1 - \frac{r}{2D} = 4{,}9999338 - 5.$
$\log \mathrm{Sin}\, \psi = 9{,}9375306 - 10.$	
$29{,}6989700 - 20.$	$10{,}0791145 - 5.$
$\mathrm{l.}\, 206264 = 5{,}3144552.$	$12{,}0134252 - 6.$
$26{,}0134252 - 20.$	$1{,}9343107 - 1.$

$x = 0{,}85963.$ Secunden.

Der

Der Geograph würde also den Winkel COP in diesem Fall um 0,85963 Secunden zu groß messen.

Dieser Winkel, wenn er auch auf jeden Fall immer nur klein seyn wird, hat nichts destoweniger auf die Ausgleichung der Winkel der Dreyecke der ersten Classe starken Einfluß! Es ist daher immer sehr dienlich, wenn der Geograph in seinem Manuale die Notizen beifüget, wo er einen entfernten Gegenstand, welcher ein solches Dreyeck schließet, nur durch sein spiegelndes Licht noch beobachten, oder auch, wo er neben seiner erleuchteten Seite, auch die blos von der Atmosphäre erleuchtete Seite noch sehen konnte; weil solche Notizen die Ausgleichung der Winkel eines Hauptdreyecks zu 180 Graden, mit seinem sphärischen Exceß reguliren helfen; wie in der Folge vorkommen wird. Es ist eben so auch für ihn räthlich, die Dimensionen, oder den horizontalen Querschnitt eines solchen Thurms, Kuppel, oder Knopfs, oder Felsenstücks abzunehmen, und in das Manuale zu notiren; wo dieß angehet

Uebrigens kann sich der Geograph dieses Fehlers auf einer Station ganz entübrigen, wenn er auf solcher einen ganzen Tag verweilet. Er nimmt nemlich eine gewisse Zeit Vormittag den Winkel nach der Morgen-Phase des Thurms, und eben so viele Stunden auch Nachmittag nach der Abend-Phase; und nimmt nachgehends aus beiden Winkeln das arithmetische Mittel für den wahren oder Centerwinkel.

b. Aehnliche Fehler kann der Geograph auch bey eckichten Thürmen, bey Thürmen mit Satteldächern, bey Felsenstücken, und selbst bey seinen Signalen der ersten Classe, oder bey seinen pyramidalen Signalen §. 3. begehen, je nachdem er diese unter verschiedener Beleuchtung mehr oder minder undeutlich siehet.

Es

Es sey z. E. in ABCD Fig. 19. der horizontale Durchschnitt eines vierkantigen pyramidalen Signals, dessen eine Quadratseite BC mit der Mittaglinie HN den Winkel CHN $=\varphi$ macht.

Befindet sich nun der Geograph in K, allwo er die Seite BC des Signals von der Sonne directe erleuchtet siehet, so kann er seine Mitte so genau in die Mitte der Fäden seines Fernrohrs bringen, als sein Augenmaaß solches zuläßt; er kann dieses auch noch, wenn er sich in (O) befindet, und er allda neben der von der Sonne erleuchteten Seite BC, auch noch die andere von der Atmosphäre erleuchtete Seite AC in dem Fernrohr deutlich siehet.

Ist hingegen das Signal von ihm so weit entfernet, daß ihm die Seite AC verschwindet, und er nur die von der Sonne erleuchtete Seite BC in O siehet, so bringet er die Mitte H dieser Seite in die Mitte seiner Fäden, und mißt so den Winkel POH, statt des Winkel POG; er mißt durch diese Erleuchtung des Signals, den Winkel POG um den Winkel GOH $=\eta$ zu groß.

Diesen Winkel nun zu finden, nehme ich an, die Richtung OG des Fernrohrs mache mit der Mittagslinie OM des Standorts O, den Winkel MOH $=\lambda$; auch sey OG $=$ D; BC $=$ a. So ist einmal beinahe, OM parallel mit HN; und OHN $=$ MOG.

Es ist ferner CHO $=\varphi-\lambda$; und in dem Dreyeck GOH, der Winklel OHG $= 90+\varphi-\lambda$; und Sin GOH : OG $=$ Sin GOH : HG; mithin

$$\text{Sin}\,\eta = \frac{\text{HG}.\text{Sin}(90+\varphi-\lambda)}{\text{OG}} \text{ oder } \eta = \frac{\text{a}.\text{Sin}(90+\varphi-\lambda)}{2\text{D}}.206264.$$

Lässet der Geograph seine Signale so erbauen, daß immer eine Seite in seine Mittagslinie selbst trift, so ist für sämmtliche $\varphi = 90°$; fällt nun sein Standpunct

an die Stelle K selbst, allwo $\lambda = o$ ist, so ist auch $\nu = \frac{a.\text{Sin } 180}{2D} = o$; weil er nun das Signal an der Seite BC ganz von der Sonne erleuchtet siehet.

Wäre die Grundfläche des Signals ein gleichseitiges Dreyeck, ABC Fig. 20., dessen Seite $AB = a$ ist; so ist einmal der Halbmesser $AG = a : \sqrt{3}$. und $GH = \sqrt{(AG^2 - AH^2)} = \sqrt{\frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{4}a^2} = a.\sqrt{\frac{1}{12}}$ $= 0{,}2598.a$; mithin für solche Signale

$$\nu = \frac{0{,}26.a.\text{Cos}(\varphi - \lambda)}{D}.206264.$$

Wenn daher der Geograph solche Fälle in sein Manuale notiret, in welchem er nur die erleuchtete Seite seiner Signale noch sehen kann, und mit dem Compas ihre Abweichung von der Mittagslinie seines Standorts mißt, so kann er in vorkommenden Fällen, den Ausschlag für die 3 Winkel eines Dreyecks um so sicherer ausführen.

Reduction eines Winkels auf die Mitte der Station.

VI. Wenn der Geograph unter seinen Hauptsignalen §. 3. operiret, so stellet er immer das Centrum seines Instruments, aufs genaueste in die durch ihre Spitze treffende Lothlinie, und mißt so in diesen Umständen die Winkel concentrisch.

Nimmt hingegen derselbe die Winkel am Fuße gewöhnlicher Signale, §. 3. IV., so kann er das Centrum seines Instruments nicht in ihre Mitte bringen; er kann dieß meistens um so weniger, wenn er auf Thürmen oder sonstigen Gebäuden seine Winkel nimmt, und muß sich auf denselben gewöhnlich da aufstellen, wo er seine Absicht zunächst erreichen kann.

In

In solchen Fällen misset der Geograph seine Winkel excentrisch; da er aber immer sein Fernrohr nach der Mitte der Gegenstände richtet, so muß er seine excentrisch gemessene Winkel immer auf die Mitte seines Beobachtungsorts oder seiner Station reduciren; oder er muß seine excentrischen Winkel centriren.

a. Es sey z. E. der Punct (G) in Fig. 21. der Mittelpunct eines Thurms PQRS, auf dessen Gallerie, oder auch an dessen Fenstern oder eingeschnittenen Luggen der Geograph sein Instrument in A vorerst aufstellen kann.

Mißt er nun in A den Winkel BAC, welchen die Gegenstände B und C allda mit einander machen, so differiret dieses Winkelmaaß, von dem wahren oder eigentlichen Winkel BGC, welchen beide Gegenstände in der Mitte des Thurms bilden, um die Winkel GBA und GCA; oder er mißt den Winkel um diese Winkel in diesem Falle zu groß; und es kommt daher darauf an, diese Winkel zu finden; wenn die Centrirung vorgenommen werden soll.

Rücksichtlich dessen muß nun zuvorderst die Centralabweichung AG und der Winkel BAE bekannt seyn, welchen die Richtung AE derselben mit der Linie AB und AC macht; es müssen außerdem noch die Distanzen GB und GC bekannt seyn, um in den Dreyecken ABG und AGC die Winkel GBA und GCA berechnen zu können.

Es sey daher AG=r; GB=D; GC=d; GBA=φ; GCA=ψ; der Abweichungswinkel GAB=λ; der observirte Winkel BAC=A; der reducirte oder centrirte BGC=A′; so ist einmal $BGA = 180 - (\lambda + \varphi)$;

$$CGA = 180 - (\lambda + \psi);$$ und

$$BGC = 360 - (GAB + GAC + \varphi + \psi);$$ und

$$GAC = 360 - GAB - BAC;$$ also

$$BGC = 360 - GAB - (360 - GAB - A) - \varphi - \psi = A - (\varphi + \psi) = A'.$$

Nun ist aber in dem Dreyeck ABG und ACG;

GB:Sin GAB = AG:Sin GBA; oder $\text{Sin}\,\varphi = \frac{r}{D}.\text{Sin}\,\lambda$; und

$$\text{Sin}\,\psi = \frac{r}{d}.\text{Sin}\,(360 - (\lambda + A)). = \frac{r}{d}.\text{Sin}\,(A + \lambda).$$

Ist nun GB und GC in Vergleich mit AG sehr groß, so ist auch

$$\varphi = \frac{r}{D}.\text{Sin}\,\lambda.206264;\ \psi = \frac{r}{d}.\text{Sin}\,(360 - (A + \lambda)).206264;$$

mithin auch der centrirte Winkel

$$A' = A - \frac{r}{D}.\text{Sin}\,\lambda + \frac{r}{d}.\text{Sin}\,(A + \lambda).206264.$$

Wäre die Distanz d in Vergleich mit r so groß, daß letztere gegen erstere als verschwindend anzusehen ist, so wäre in diesem Falle $A' = A - \frac{r}{D}.\text{Sin}\,\lambda.206264.$

Kann nun der Geograph in der Stelle A den Mittelpunct (G) des Thurms sehen, so hänget er über denselben einen Senkel auf, und mißt nach diesem den Winkel BAG unmittelbar.

Ist statt dessen der Mittelpunct (G) in A nicht zu sehen, so nimmt der Geograph in A den Winkel BAQ nach dem Ecke Q des Thurms, nnd mißt den Abstand AQ desselben von der Stelle A, wo sich das Centrum seines Instruments befindet; und eben so auch Aa senkrecht auf Pa.

Er mißt nachgehends sämmtliche Seiten des Thurms, oder construirt sein rechtwinklichtes Viereck PQRS; zieht in demselben die Linie AG und mißt nachgehends den Winkel BAG mit dem Transporteur.

b. Findet der Geograph Veranlassung, sein Instrument auch in A' auf der Gallerie des Thurms aufzustellen, so richtet er zuvörderst dasselbe nach dem Gegenstande C, welcher der letzte war, den er in A noch sehen konnte.

Ist

Ist nun M einer der allda sichtbaren Gegenstände, so mißt er den Winkel CA′M, und reduciret ihn nachgehends auf den Centerwinkel CGM, und es ist

$$CGM = CA'M - (GCA' + A'MG).$$

Ist nun M der letzte in A′ sichtbare Gegenstand, so richtet der Geograph nachdem er sein Instrument ferner in A″ aufgestellt hat, nach diesem; er mißt den Winkel MA″N; dessen centrirtes Maaß der Winkel

$$MGN = MA''N - (GMA'' + GNA'') \text{ ist.}$$

Eben so ist auch für den vierten Standpunct in A‴. der centrirte Winkel von NA‴B; oder

$$BGN = BA'''N - (A'''NG + A'''BG).$$

Dabey finden sich nun die Abweichungswinkel CA′G„ MA″G und NA‴G wie vorhin für den Winkel BAG in A.

Können die Winkel von innen des Thurms, an seinen Fenstern oder Schlitzen gemessen werden, so erhält man die Abweichungswinkel auf die vorige Art, indem man das innere Profil des Thurms construirt; und aus den Standpuncten, gerade Linien nach seiner Mitte ziehet.

Bey diesem Verfahren müssen also immer die Abstände der Gegenstände, auf welche man die Winkel nimmt, von dem Standpunct (G) bekannt seyn. Man findet sie beiläufig, indem man die Distanzen indessen nach den excentrischen Winkeln berechnet, und so dieselben in die Formel für den concentrischen Winkel substituirt.

Das Centriren eines Winkels giebt also sein concentrisches Maaß immer nur näherungsweise; weil man einmal den Abweichungswinkel nicht immer genau genug finden kann, und man außerdem die Distanzen der Gegenstände auch nicht scharf genug erhält; als von welchen beiden Dingen die Correctionswinkel zunächst abhängen.

Aus diesem Grunde muß daher der Geograph bey der Aufnahme der Hauptdreyecke, auf welche sich das

Gan-

Ganze fundiret, immer zunächst der Signale der ersten Classe §. 3. sich bedienen, unter welchen er ihre Winkel unmittelbar concentrisch messen kann; er kann nur solche Gegenstände in die Triangel der andern Ordnung oder in die Secondär-Dreyecke auswählen, auf welchen er nun excentrisch arbeiten kann.

Wo übrigens die Winkel erst durch die Neigung der Signale (IV.), oder auch durch die Erleuchtung der Gegenstände (V.) corrigirt werden müssen, wird das correcte Maaß derselben für den excentrisch gemessenen Winkel, in die Centrirungsformel substituirt; und so der concentrische Winkel um so genauer gefunden, bey sonst übrigen gleichen Umständen.

Außerdem kann auch die sogenannte Gyral-Winkelprobe für einen Standpunct um so mehr von dem wahren Gyrus abweichen, auf je mehr Stellen das Instrument, an der nemlichen Station aufgestellt werden mußte, um den Winkel ringsum zu erhalten.

Denn so wie es möglich ist, daß sich unvermeidliche Fehler neben einander aufheben können; eben so ist es auch möglich, daß sie auf einerley Seite fallen, oder sich summiren. Auf der Station (G) ist nemlich die Summe aller Centralwinkel um den ganzen Horizont herum

$$BGC+CGM+MGN+NGB\ ;\ \text{oder}$$

$$A+A'+A''+A'''-[ABG+ACG+GCA'+A'MG+GMA''+GNA''+A'''NG+A^{IV}BG].$$

deren Differenz von 360 Graden, die Abweichung der centrirten Winkel von dem wahren Gyrus ausdrücket.

Je mehr Standpuncte daher der Geograph auf dem nemlichen Thurm wählen muß, um den Gyrus zu erhalten, um so unsicherer fällt seine Gyralwinkelprobe aus; es ist daher auch von dieser Seite eine solche Station nicht für Dreyecke der ersten Classe geeignet!

Wo übrigens ein Gegenstand E in die Abweichungsebene AG selbst trift, mithin der Winkel BAE excentrisch gemessen wird, so ist der concentrische Winkel

$BGE = 180 - (GAE + ACG)$; $GAC = 180 - A$; also

$BGE = 180 - (180 - A + \varphi) = A - \varphi$.

Uebrigens kann sich der Geograph zum Behuf des Centrirens seiner gemessenen Winkel, gewisse Hülfstafeln berechnen, durch welche diese Arbeit möglichst erleichtert wird.

§. 7.

Einige bey geographischen Messungen anwendbare polygonometrische Aufgaben.

Bestimmung des Abstandes zweier Gegenstände, durch Traversen, wenn man von einem zum andern sehen kann.

I. Wenn auch jeder der dem Geographen untergeordneten Geometer, sein Triangularsystem so weit als immer möglich ist, zu extendiren, und auf die niedern Ordnungen herunter zu bringen sich bemühet, §. 4. III. c.; so ist es doch nicht immer möglich, alle und jede Gegenstände des Landes, welche bestimmte Puncte seiner geographischen Charte abgeben sollen, durch Dreyecke zu bestimmen: er kann öfters nach einem Gegenstand nur einen Winkel nehmen, oder nur eine einzige Vision erhalten; er kann einen oder den andern am Fuße eines Berges, oder sonst im Thale, oder in einem Walde liegenden Gegenstand, auf keinem bestimmten Dreyeckpuncte sehen; oder wenn er ihn auch siehet, so ist er so gelegen, daß er sich wegen des zu spitzigen oder zu stumpfen Winkels nicht sicher genug bestimmen lässet.

In

In allen diesen Fällen muß daher der Geometer jene Methode noch einschlagen, die mit der trigonometrischen genau verbunden ist; das ist: er bemühet sich, nach der polygonometrischen Transversal-Methode einen solchen Gegenstand mit möglichster Genauigkeit aufzunehmen.

a. Es sey z. E. in Fig. 22. der Punct A durch die Seite AZ eines Dreyecks bestimmt, und (G) ein Gegenstand in einem Thale, den er in A zwar sehen, aber nicht gerade zu ihm gelangen kann; er muß vielmehr den transversalen Weg AB„BC„CD„DE„EF„FG nehmen, und diese Linien mit den von ihnen eingeschlossenen Winkeln messen, um den Punct (G) aus ihnen, nach den Regeln der Polygonometrie zu bestimmen.

Dabey verstehet es sich an und für sich, daß die Messung jener Linien, wo sie mit Stäben, oder statt deren mit der Kette geschiehet, immer Staffelweise betrieben wird, wo das Terrain steiget oder fället; daß außerdem auch die Winkel horizontal gemessen, oder sonst auf den Horizont reducirt werden; um die Distanz AG in ihrem horizontalen Maaß, als Theil des größten Bogens, von dem Halbmesser der osculirenden Sphäre §. 10. zu erhalten.

Uebrigens findet man die Winkel AG folgendermaßen:

Es sey für den Anfangspunc A der Abscisse AG, der äußere Winkel mAB=A; für den Punct B der äußere Winkel nBC=B, und so für die übrigen Puncte C„D„E„F, die äußern Winkel gleich C„D„E„F; und die Seiten AB=a; BC=b; CD=c; DE=d; EF=e; FG=f.

Ziehet man durch die Puncte B„C„D„E„F Parallel-Linien, und auf dieselbe andere Linien Bb„Cc„Dd„Ee„Ff„gF senkrecht, so geben diese die Ordinaten für die Abscissen Ab„Bc„Cd„De„Ff„ und gG ab.

Setzt man ferner den innern Winkel $\mu AB = \alpha$; so ist einmal

μAB

$\mu AB = 180 - A = \alpha$; ferner

$A\mu B = 180 - (\mu AB + ABC)$.

$\mu AB = 180 - A$; $ABC = 180 - B$.

$A\mu B = A + B - 180 = -(180 - (A+B))$.

Auch ist

$A\mu B = vCp = qCB = CBc = \beta$; $pC\psi = \mu\psi C$.

Nimmt man den äußern Winkel in C gleich $180 + BCD = C$; so ist auch

$C + vCp + pCD = 360$; oder

$C + A\mu B + \mu\psi C = 360$; also

$\mu\psi C = 360 - A\mu B - C = dCD = \gamma$;

$\mu\psi C = 360 - (A + B - 180) - c$;

$= 540 - (A+B+C) = \gamma$.

$eDE = CDE - (CDd + 90)$;

$CDd = 90 - \mu\psi C$; $CDE = 180 - d$;

$eDE = 180 - D - 90 - (90 - (540 - (A+B+C))$

$= 540 - (A+B+C+D) = \delta$.

$fFE = D\lambda E = 180 - (eDE + DEF)$.

$DEF = 180 - E$; also

$fFE = 180 - (180 - E) - (540 - (A+B+C+D))$

$= A+B+C+D+E - 540 = \varepsilon$.

$= -(540 - (A+B+C+D+E))$.

$gFG = EFG - (90 + fFE)$.

$EFG = 180 - F$.

$gFG = 90 - F + 540 - (A+B+C+D+E)$

$= 630 - (A+B+C+D+E+F)$.

$gGF = A+B+C+D+E+F - 540 = \zeta$.

Nun ist aber

$Ab = a\mathrm{Cos}\,\alpha$; $Bc = b\mathrm{Cos}\,\beta$; $Cd = c\mathrm{Cos}\,\gamma$; $De = d\mathrm{Cos}\,\delta$;

$Ff = e\,\mathrm{Cos}\,c$; $gG = f\,\mathrm{Cos}\,\zeta$.

aus deren Summirung sich also die verlangte Distanz AG ergiebt.

Es

Es seyen z. E. gemessen worden, die Winkel

GAB = 30°„0′; ABC = 111°„45′; BCD = 100°„0;

CDE = 146°„30; DEF = 150°„55′; EFG = 143°„45′;

die Seiten AB = 478; BC = 698; CD = 830; DE = 558;

EF = 497; FG = 360 Meter; so ist hier

A = 150°„0; B = 68°„15; C = 280; D = 33°30;

E = 29°„5; F = 360; mithin

180	150	218„15	498„15
150	168„15	280	33„30
α = 30	218„15	498„15	531„45
	180	540	540„
	β = 38„15	γ = 41„45	δ = 8„15

531„45	560„50	
29„ 5	36„15	
560„50	597„ 5	
540	540	
ε = 20„50	57°„ 5 = ζ.	

log a = 2,6794279.
l.Cosα = 9,9375306—10.
2,6169585.
9,6989700—10.
2,3783970.
Ab = 413,96; Bb = 239,00.
log c = 2,9190781.
9,8727722—10.
2,7918503.
9,8233971—10.
2,7424752.
Cd = 619,23; Dd = 552,68.
log e = 2,6963564.
9,9706346—10.
2,6669910.
9,5510237—10.
2,2473801.
Ff = 464,51; Ef = 176,76.

log b = 2,8438554.
l.Cosβ = 9,8922329—10.
2,7360883.
9,7962062—10.
2,6400616.
Bc = 544,61; Cc = 436,60.
log d = 2,7466342.
9,9954822—10.
2,7421164.
9,1568296—10.
1,9034638.
De = 552,22; Ee = 80,069.
log f = 2,5563025.
9,9240010—10.
2,4803035.
9,7351345—10.
2,2914370.
Fg = 302,21; Gg = 195,63.

Nach

Nach dieser Berechnung wäre also die Distanz Ag = 2778,16 Meter; und die den Abscissen entsprechende Ordinaten sind folgende:

Bb = 239,00.	Dw = 355,08.
Cc = 436,60.	Ee = 80,069.
Ct = 197,60.	Eh = 435,149.
Dd = 552,68.	Ef = 176,760.
Dw = 355,08.	gF = 258,389.

b. Ueberhaupt aber sind die Gleichungen für die Abscissen und Ordinaten, der durch Traversen zu bestimmenden Distanz, für diesen Fall folgende.

Nach den Principien der analytischen Trigonometrie ist $\mathrm{Sin}-P = -\mathrm{Sin}\,P$; und $\mathrm{Cos}-P = \mathrm{Cos}\,P$.

Ist nun $P = n.360-\varphi$; so ist auch $\mathrm{Sin}\,P = -\mathrm{Sin}\,\varphi$; und $\mathrm{Cos}\,P = \mathrm{Sin}\,\varphi$; mithin auch $\mathrm{Sin}-(n.360-\varphi) = \mathrm{Sin}\,\varphi$; $\mathrm{Cos}-(n.360-\varphi) = -\mathrm{Cos}\,\varphi$; es ist daher auch

$$a\,\mathrm{Cos}\,\alpha = -a\,\mathrm{Cos}\,A;\ b\,\mathrm{Cos}\,\beta = -b\,\mathrm{Cos}(A+B);$$
$$c\,\mathrm{Cos}\,\gamma = -c.\mathrm{Cos}(A+B+C)\ \text{u. s. w.};$$

eben so ist auch

$$a.\mathrm{Sin}\,\alpha = -a\,\mathrm{Sin}\,A;\ b\,\mathrm{Sin}\,\beta = -b\,\mathrm{Sin}(A+B)\ \text{u. s. w.}$$

Setzt man nun $AG = g$; so ist einmal

$$a\,\mathrm{Cos}\,A + b.\mathrm{Cos}(A+B) + c\,\mathrm{Cos}(A+B+C) + d.\mathrm{Cos}(A+B+C+D) + e\,\mathrm{Cos}(A+B+C+D+E) + \ldots = -g$$

die allgemine Gleichung für die Abscissen der Traversen.

Was ferner die Ordinaten der Traversen anbelangt, so ist die Ordinate für den

Punct A = o.

B = Bb.

C = Ct = Cc − Bb.

D = Dw = Dd − Ct = Dd − Cc + Bb.

E = Eh = Dw + Ee = Dd − Cc + Bb + Ee.

F = Fg = Eh − Ef = Dd − Cc + Bb + Ee − Ef.

G = o = hf − gF = Dd − Cc + Bb + Ee − Ef − gF;

oder es ist

$= \text{Sin}\,\gamma - b\,\text{Sin}\,\beta + a\,\text{Sin}\,\alpha + d\,\text{Sin}\,\delta - e\,\text{Sin}\,\varepsilon - f\,\text{Sin}\,\zeta = 0$; oder

$-c.\,\text{Sin}(A+B+C) - b\,\text{Sin}(A+B) - a\,\text{Sin}\,A -$

$-d.(\text{Sin}A+B+C+D) - e.\,\text{Sin}(A+B+C+D+E) - f.(\text{Sin}A+B+C+D+E+F) = 0$;

oder es ist

$$\left.\begin{array}{l} a\,\text{Sin}\,A + b\,\text{Sin}(A+B) + c\,\text{Sin}(A+B+C) + d\,\text{Sin}(A+B+C+D) \\ + e.(\text{Sin}\,A+B+C+D+E) + f.\,\text{Sin}(A+B+C+D+E+F) \end{array}\right\} = 0.$$

die allgemeine Gleichung für die Ordinaten der Traversen.

c. Diese beide Gleichungen lassen sich kürzer ausdrücken, wenn man setzt

$A = a$; $A+B = b$; $A+B+C) = c$; $A+B+C+D = d$;

$A+B+C+D+E = e$; $A+B+C+D+E+F = f$.

Nach dieser Bezeichnung wird nemlich auch

$a\,\text{Sin}\,a + b\,\text{Sin}\,b + c\,\text{Sin}\,c + d\,\text{Sin}\,d + e\,\text{Sin}\,e + f\,\text{Sin}\,f = 0$; und

$a\,\text{Cos}\,a + b\,\text{Cos}\,b + c\,\text{Cos}\,c + d\,\text{Cos}\,d + e\,\text{Cos}\,e + f\,\text{Cos}\,f = -g.$

Quadriret man beide Gleichungen, so ist das Quadrat der ersten Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} a^2\text{Sin}\,a^2. + b^2\text{Sin}\,b^2 + c^2\text{Sin}\,c^2 + d^2\text{Sin}\,d^2 + e^2\text{Sin}\,e + f^2\text{Sin}\,f^2 \\ + 2\,a\,\text{Sin}\,a.(b\,\text{Sin}\,b + c\,\text{Sin}\,c + d\,\text{Sin}\,d + e\,\text{Sin}\,e + f\,\text{Sin}\,f) \\ + 2\,b\,\text{Sin}\,b.(c\,\text{Sin}\,c + d\,\text{Sin}\,d + e\,\text{Sin}\,e + f\,\text{Sin}\,f) \\ + 2\,c\,\text{Sin}\,c.(d\,\text{Sin}\,d + e\,\text{Sin}\,e + f\,\text{Sin}\,f) \\ + 2\,d\,\text{Sin}\,d.(e\,\text{Sin}\,e + f\,\text{Sin}\,f) \\ + 2\,e\,\text{Sin}.(f\,\text{Sin}\,f) \end{array}\right\} = 0.$$

Eben so ist auch das Quadrat der andern Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} a^2\text{cos}\,a^2. + b^2\text{cos}\,b^2 + c^2\text{cos}\,c^2 + d^2\text{cos}\,d^2 + e^2\text{cos}\,e^2 + f^2\text{cos}\,f^2 \\ + 2\,a\,\text{Cos}\,a.(b\,\text{Cos}\,b + c\,\text{Cos}\,c + d\,\text{Cos}\,d + e\,\text{Cos}\,e + f\,\text{Cos}\,f) \\ + 2\,b\,\text{Cos}\,b.(c\,\text{Cos}\,c + d\,\text{Cos}\,d + e\,\text{Cos}\,e + f\,\text{Cos}\,f) \\ + 2\,c\,\text{Cos}\,c.(d\,\text{Cos}\,d + e\,\text{Cos}\,e + f\,\text{Cos}\,f) \\ + 2\,d\,\text{Cos}\,d.(e\,\text{Cos}\,e + f\,\text{Cos}\,f) \\ + 2\,e\,\text{Cos}\,e.(f\,\text{Cos}\,f) \end{array}\right\} = g^2.$$

Diese Transversalmethode kann in einem ebenen Lande für die Bestimmung der Abstände solcher Gegenstände ange-

angewandt werden, die mehrere Meilen von einander entfernet sind; wovon in der Folge Anwendung gemacht werden wird.

Bestimmung des Abstandes zweier Gegenstände durch Traversen, bey welchen man von keinem zum andern sehen kann.

II. Etwas weitläuftiger wird die Berechnung des Abstandes des Gegenstandes (G) von dem A in Fig. 22., wenn man von A nach G nicht sehen, mithin auch den Winkel GAB nicht wirklich nehmen kann!

Denn in diesem Falle muß der Geometer darauf antragen, zuvörderst die Weite AG, ohne den Winkel GAB zu finden; er muß außerdem auch noch diesen Winkel GAB berechnen, um ihn mit der Seite AZ des Dreyecks in Verbindung zu setzen, und sonach den Punct (G) richtig auftragen zu können.

a. Unter diesen erhält man nun einmal die Distanz AG, wenn man die in (II.) construirten quadratischen Gleichungen addiret, und übrigens folgendermaaßen verfähret.

Es ist nemlich

$$
\left.\begin{array}{l}
a^2(\sin^2 a+\cos^2 a)+b^2.(\sin^2 b+\cos^2 b)+c^2(\sin^2 c+\cos^2 c)\\
+d^2.(\sin^2 d+\cos^2 d)+e^2.(\sin^2 e+\cot^2 e)+f^2.(\sin^2 f+\cos^2 f)\\
\quad +2ab\,(\sin a\sin b+\cos a.\cos b)\\
\quad +2ac\,(\sin a\sin c+\cos a\cos c)\\
\quad +2ad\,(\sin a\sin d+\cos a\cos d)\\
\quad +2ae\,(\sin a\sin e+\cos a\cos e)\\
\quad +2af\,(\sin a\sin f+\cos a\cos f)\\
\quad +2bc\,(\sin b\sin c+\cos b\cos c)\\
\quad +2bd\,(\sin b\sin d+\cos b\cos d)
\end{array}\right\}=o+g^2.
$$

$$
+2bc
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
+\,2be\,(\mathrm{Sin}\,b\,\mathrm{Sin}\,e+\mathrm{Cos}\,b\,\mathrm{Cos}\,e)\\
+\,2bf\,(\mathrm{Sin}\,b\,\mathrm{Sin}\,f+\mathrm{Cos}\,b\,\mathrm{Cos}\,f)\\
+\,2cd\,(\mathrm{Sin}\,c\,\mathrm{Sin}\,d+\mathrm{Cos}\,c\,\mathrm{Cos}\,d)\\
+\,2ce\,(\mathrm{Sin}\,c\,\mathrm{Sin}\,e+\mathrm{Cos}\,c\,\mathrm{Cos}\,e)\\
+\,2cf\,(\mathrm{Sin}\,c\,\mathrm{Sin}\,f+\mathrm{Cos}\,c\,\mathrm{Cos}\,f)\\
+\,2de\,(\mathrm{Sin}\,d\,\mathrm{Sin}\,e+\mathrm{Cos}\,d\,\mathrm{Cos}\,e)\\
+\,2df\,(\mathrm{Sin}\,d\,\mathrm{Sin}\,f+\mathrm{Cos}\,d\,\mathrm{Cos}\,f)
\end{array}\right\}=o+g^2.
$$

Nun ist aber $a^2\,(\mathrm{Cos}^2\,a+\mathrm{Sin}\,a^2)=a^2$; ferner $2ab\,(\mathrm{Sin}\,a\,\mathrm{Sin}\,b+\mathrm{Cos}\,a\,\mathrm{Cos}\,b)=2ab\,\mathrm{Cos}\,(b-a)$ und eben so verhält sichs auch mit den übrigen Gliedern dieser Reihe; und es ist deswegen

$$
\left.\begin{array}{l}
a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2\\
+2ab.\cos(b-a)+2ac\cos(c-a)+2ad\cos(d-a)\\
\qquad +2ae.\cos(e-a)+2af.\cos(f-a)\\
+2bc.\cos(c-b)+2bd\cos(d-b)+2be\cos(e-b)\\
\qquad +2bf.\cos(f-b)\\
+2cd.\cos(d-c)+2ce\cos(e-c)+2ef\cos(f-c)\\
+2de.\cos(e-d)+2df\cos(f-c)\\
+2ef.\cos(f-e)
\end{array}\right\}=g^2.
$$

Subſtituiret man in dieſe Reihe die Werthe von $a,,b,,c,,d,,e,,f$, aus (II.), ſo iſt $a=A$; $b-a=A+B-A=B$; $c-a=A+B+C-A=B+C$; $d-a=A+B+C+D-A=B+C+D$;

$e-a=A+B+C+D+E-A=B+C+D+E$; u. ſ. w.

mithin $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2$;

$+2a(b\mathrm{Cos}B+c\mathrm{Cos}(B+C)+d\mathrm{Cos}(B+C+D)+e.\mathrm{Cos}(B+C+D+E)$
$+f(\mathrm{Cos}\,B+C+D+E+F))$;

$+2b(c\mathrm{Cos}C+d\mathrm{Cos}(C+D)+e.\mathrm{Cos}(C+D+E)+f.\mathrm{Cos}C+D+E+F))$;

$+2c(d\mathrm{Cos}\,D+e\,\mathrm{Cos}(D+E)+f.\,\mathrm{Cos}(D+E+F))$;

$+2d.(e\mathrm{Cos}\,E+f.\,\mathrm{Cos}\,(E+F))$.

$+2ef.\mathrm{Cos}\,F=g^2$.

Aus welcher Gleichung alſo die Diſtanz AG in Fig. 22. ſich ergiebt, ohne daß man den Winkel A zu meſſen nöthig hat.

b. Außerdem findet man den Winkel $mAB = A$ in Fig. 22. durch seine Tangente auch folgendermaßen.

Da nemlich $\text{Sin}(A+B) = \text{Sin}\,A\,\text{Cos}\,B + \text{Cos}\,A\,\text{Sin}\,B$; und $\text{Sin}(A+B+C) = \text{Sin}\,A.\text{Cos}(B+C) + \text{Cos}\,A.\text{Sin}(B+C)$ ist; so lässet sich die Gleichung für die Ordinaten in (II.) auch folgendermaßen ausdrücken:

$$a\,\text{Sin}\,A + b.\text{Sin}\,A\,\text{Cos}\,B + b\,\text{Cos}\,A\,\text{Sin}\,B + c.\text{Sin}\,A\,\text{Cos}(B+C) + c.\text{Cos}\,A.\text{Sin}(B+C);$$
$$+ d\,\text{Sin}\,A.\text{Cos}(B+C+D) + d.\text{Cos}\,A.\text{Sin}(B+C+D);$$
$$+ e.\text{Sin}\,A.\text{Cos}(B+C+D+E) + e.\text{Cos}\,A.\text{Sin}(B+C+D+E)$$
$$+ f.\text{Sin}\,A.\text{Cos}(B+C+D+E+F) + f\,\text{Cos}\,A.\text{Sin}(B+C+D+E+F). \quad = 0.$$

Dividiret man sämmtliche Glieder dieser Reihe durch Cos A;

so ist auch

$$[a+b.\text{Cos}B+c.\text{Cos}(B+C)+d.\text{Cos}(B+C+D)+e\text{Cos}(B+C+D+E)+f\text{Cos}(B+C+D+E+F)]\,\text{tang}\,A$$
$$+ b\,\text{Sin}\,B + c.\text{Sin}(B+C) + d.\text{Sin}(B+C+D) + e\,(\text{Sin}\,B+C+D+E) + f\,\text{Sin}(B+C+D+E+F) = 0.$$

woraus sich ergiebt

$$\text{tang}\,A = -\frac{b\text{Sin}B+c\text{Sin}(B+C)+d\text{Sin}(B+C+D)+e\text{Sin}(B+C+D+E)+f\text{Sin}(B+C+D+E+F)}{a+b\text{Cos}B+c\text{Cos}(B+C)+d\text{Cos}(B+C+D)+e\text{Cos}(B+C+D+E)+f\text{Cos}(B+C+D+E+F)}.$$

Hat

Hat daher der Geometer nach der Formel (Lit. a.) den Abstand AG berechnet, so kann er auch nach dieser Formel den Winkel A=180—α.=180—GAB finden, welchen die Linie AG mit der Traverse AB macht; und sonach auch den Winkel GAZ bestimmen; wornach sich die Verbindung der Linie AG mit der Seite AZ des Dreyecks zunächst ergiebt.

Diese Aufgaben finden ihre Anwendung bey der Detailmessung solcher Staaten, die sehr gebirgicht und waldicht sind. Man nimmt durch sie die Thäler der Gebirgketten und Landstraßen auf, die durch Wälder führen.

c. Ist ferner auf einer Linie MN in Fig. 23. ein Punct A gegeben, von welchem aus man transversal, durch die Linie AB„BC„CD„ nach einem Orte D kommen kann, und man will die Coordinaten dieser Puncte für die auf MN in (a.) perpendiculare berechnen, so ist das Verfahren folgendes.

Es sey AB=a; BC=b; CD=c; NAB=A; ABC=B; BCD=C; so ist einmal aB=aSin A; Aa=a. Cos A;

ferner

CBc=180—(B+ABa)=180—(B+90—A)=90—(B—A);

also Cc=b. Cos(D—A); BC=b. Sin(B—A).

Ziehet man ferner die Linie Dδ parallel mit ad, so ist der Winkel

DCδ=C—cCB=C—(90—CBd)=C—(B—A); und

Dδ=c.Sin(C—(B—A)); Cδ=c.Cos(C—(B—A));

also auch Dd=Cδ—Cc;

wornach sich also die Puncte B„C„D durch ihre Coordinaten auf den Perpendikel ad auftragen lassen.

Diese Aufgabe findet vorzüglich Anwendung bey der Aufnahme waldichter und gebirgichter Gegenden!

Wenn nemlich die Linie MN eine der Traversen ist, die man um und durch den Wald für seine Aufnahme abstecket,

stecket, und es bricht in dieselbe ein Vicinalweg oder Gehsteig nach einem zur Seite in dem Walde, oder in einer Schlucht oder Halte liegenden Ort oder Einöde, deren Lage man bestimmen will; so wird dieser Weg durch Traversen aufgenommen, und für den Ort der Perpendikel berechnet, der auf der Traverse senkrecht stehet, in welcher er seinen Fußpunct findet.

Aufnahme eines Polygons.

III. Bey der Detailmessung gebirgichter und waldichter Staaten, muß der Geometer das aufzunehmende Terrain nach vorgenommener sorgfältigen Recognoscirung, öfters in gewisse Sectionen abtheilen, von welchen er eine um die andere aus ihren Umfang oder Perimeter vorerst aufzunehmen hat, ehe er das Detail, das sie in ihrem Innern hat, aufmessen kann.

Bey einer solchen Perimetralmessung muß nun der Geometer zunächst darauf antragen, die Section durch gerade Linien, die er an ihrem Umfang absstecket, auf die möglichst einfachste Form zu bringen, oder die Anzahl seiner Umfangsseiten möglichst zu reduciren.

Er mißt sodann diese Umfangsseiten, mit den Winkeln, welche sie einschließen, und trägt die Figur der Section durch Abscissen und Ordinaten auf, nachdem er zuvor die nöthigen Winkelproben und Reductionen der Ordinaten und Abscissen angestellt hat.

a. Dabey kann sichs nun treffen, daß die Section sich auf ein Polygon bringen lässet, das lauter ausspringende Ecken hat; oder es kann sich ihm statt dessen ein Polygon ergeben, das aus- und einspringende Ecken wechselsweise zeiget.

Für den erstern Fall werden nun die Abscissen und Ordinaten des Polygons folgendermaßen berechnet.

Es habe sich für eine Section das Polygon ABCDEF GH in Fig. (24.) ergeben, bey welchem gemessen wurden

die Winkel.	die Seiten.
BAH = 93°„ 18.	AB = 242 Ruthen.
ABC = 113 „ 9	BC = 252,5
BCD = 154 „ 31	CD = 283,5
CDE = 144 „ 30	DE = 382,0
DEF = 175 „ 18	EF = 109,0
EFG = 129 „ 33	FG = 46,0
FGH = 108 „ 12	GH = 86,6
AHG = 161 „ 29	

AG = 812,5. Ruthen.

Nimmt man nun die längste der Seiten oder AH für die Abscissenaxe der Figur an, fället auf diese aus den Eckpuncten B„C„D„E... Perpendikel, und ziehet außerdem durch dieselbe Parallelen mit der Abscissenaxe, so sind aA„Ad„Ag... die Abscissen, und Ba„Cd„Dg die Ordinaten der Puncte B„C„D...

Für die durch diese Abscissen und Ordinaten sich ergebende rechtwinklichte Dreyecke AaB„BbC„CcD.... sind nun die Winkel

aAB = 180—93°„ 18 =86°„42; aBA = 3°„ 18′.
bBC = 180—(B+aBA) = 63„33; BCb = 26„27.
cCD = C—(90+CBb) = 4„58; CDc = 89„ 2.
fDE = D—CDc = 55„28; fED = 34„32.
hEF = E—(90+fED) = 50°„46; hFE = 39°„14.
kFG = F—(90+hFE) = 0„ 19; kGF = 89„41.
HGv = 180—(G+kFG) = 71„29; GHv = 18„31.

Ehe man nun die Rechnung der Abscissen und Ordinaten selbst beginnet, vollführet man die Polygonarwinkelprobe, und controliret außerdem den nach diesem Typus berechneten Winkel GHv mit dem wirklich gemessenen.

Da

Da nun in diesem Polygon von 8 Seiten, die Summe der innern Winkel (8—2). 180 oder 1080° seyn müßte, so addiret man sämmtlich gemessene Winkel zusammen; und da ihre Summe gerade 1080 giebt, so passet die Winkelmessung mit jener Probe zusammen.

Ist ferner GHv = 18„31, so ist auch AHG = 180 — 161„29 = 18„31, welches also auch mit dem gemessenen Winkel zusammen trift.

Würde sich in der Winkelprobe, und in den Controlwinkel eine Differenz zeigen, so müßte man dieselbe durch sämmtliche Umfangswinkel ausgleichen; und dabey nach §. 4. VIII. auf die Zuverlässigkeit Rücksicht nehmen, mit welcher man nach bestehenden, im Manual angemerkten Umständen, einen Winkel vor dem andern messen könnte; bis diese Ausgleichung, und der Controlwinkel zupassen. Erst nachdem diese Interpolation bewerkstelliget worden ist, berechnet man in den Dreyecken aAB; BbC... die Seiten aA„aB; bB„bC...

Für dieß Polygon ergeben sich nun folgende Abscissen und Ordinaten.

aA = 13,93; aB = 241,60	Df = 216,55; Ef = 314,69.
bB = 112,47; bC = 226,07	Eh = 68,94; Hf = 84,429.
Cc = 283,46; De = 4,7828	Fk = 46,00; Gk = 0,2542.
Gv = 27,502;	Hv = 82,117.

Nach dieser Berechnung ergiebt sich nun die längste Seite des Vielecks AH = 226,07 — 13,93 + 283,46 + 314,69 + 84,429 + 0,2542 — 82,117 = 812,8562 Ruthen; also um 812,8562 — 812,5 = 0,3562 Ruthen größer als sie gemessen wurde.

Fällt nun diese Differenz noch innerhalb der Gränzen, in welchen man diese Linie nach dem Terrain sicher messen kann, oder kommt sie dieser Gränze wenigstens sehr nahe, so kann man die berechneten Abscissen der Eckpuncte des Winkels für richtig annehmen.

Weicht aber statt dessen jene Differenz von jener Gränze zu stark ab, so muß man die berechneten Abscissen interpoliren.

Wäre z. E. die Linie AH zu 815,5 berechnet worden, so wäre die Differenz 3 Ruthen; und man müßte daher die Interpolation der Abscisse AD = 212,14 folgendermaßen bewerkstelligen.

812,5 : 212,14 = 3 : x; x = 0,78 Ruthen,

um welche man die Abscisse Ad kürzer annehmen müßte. Eben so verfährt man mit jeder andern Abscisse, bis endlich ihre reducirte Längen der gemessenen 812,5 gleich werden.

Eben so sollte in diesem Vieleck seyn

aB + bB + cD — (fD + Eh + kF + G v) = 0;

statt dessen aber ist 358,85 — 358,992 = — 0,142 Ruthen; es müssen daher auch die Ordinaten der Eckpuncte noch interpolirt werden, ehe man sie für richtig erkennen und auftragen kann.

Da nun der Complex sämmtlicher Ordinaten von 717,842 die Differenz 0,142 giebt, so ist auch die Interpolation der größten Ordinate DG von 358,85 folgende:

717,842 : 358,85 = 0,142 : x, und x = 0,07 Ruthen; um so viel müßte man also die Ordinate DG verkürzen; und eben so müßte man auch mit jeder andern verfahren, ehe man das Vieleck aufträgt.

Dabey verstehet sich nun an und für sich, daß man jede Umfangsseite des Vielecks wieder als eine Basis ansehen kann, nach welcher man Gegenstände, die derselben zur Rechten und Linken liegen, trianguliren, oder ihre Lage trigonometrisch bestimmen kann.

b. Hat das aufgenommene Vieleck ABCDEFG in Fig. (25.) Tab. III. neben seinen ausspringenden Ecken auch einspringende Ecken, wie z. E. die Winkel CDE und EFG, so nimmt man wie in (a.) seine längste Seite AG für die Abscissenaxe an, und fället auf dieselbe aus seinen

nen Eckpuncten B„C„D„E„F, Perpendikel Bm„Ct„DS..., und ziehet durch die Eckpuncte nach denselben wie vorhin Parallelen mit der Abscissenaxe AG; die man nachgehends wie in (a.) berechnet und behandelt.

Rücksichtlich dessen sey nun der Winkel $mAB = \alpha$; $nCB = \beta$; $gDC = \gamma$; $DEx = \delta$; $vFE = \varepsilon$; $FGA = \zeta$: so ist einmal $\alpha = 180 - A$; und es lassen sich hieraus in dem Dreyeck mAB die Abscisse mA und die Ordinate mB des Puncts B berechnen.

Ferner ist:

$\beta = 90 - nBC$.

$nBC = 180 - (B + mBA) = 180 - B - (90 - \alpha)$

$= 90\,B + \alpha = 90 - B + 180 - A$; oder

$nBC = 270 - (A + B$; und

$\beta = 90 - (270 - (A + B)) = -180 + (A + B)$.

$\gamma = 90 - qCD$.

$qCD = C - BCp = C - (90 - \beta) = C + 90 + \beta$.

$= C - 90 - 180 + A + B = -270 + A + B + C$.

$\gamma = 90 - (-270 + A + B + C) = 360 - (A + B + C)$.

$\delta = 90 - EDX$.

$\gamma + 90 + EDX = 360 - D$.

$EDX = 270 - D - \gamma = 270 - D - (360 - (A + B + C))$

$= -90 - D + A + B + C$.

$\delta = 90 - (-90 - D + A + B + C) = 180 + D - (A + B + C)$.

$\varepsilon = 90 - vEF$.

$vEF = E - (90 + \delta) = E - 90 - (180 + D - A + B + C)$

$= -270 + A + B + C - D + E$.

$\varepsilon = 90 - (-270 + A + B + C - D + E)$

$= 360 - (A + B + C - D + E)$.

$\varepsilon + 90 + 90 - \zeta = 360 - F$.

$\zeta = -180 + F + \varepsilon. = -180 + F + 360 - (A + B + C - D + E)$

$\zeta = 180 - (A + B + C - D + E - F)$.

Ehe man nun nach diesen Winkeln und den Umfangsseiten der Figur, ihre Coordinaten berechnet, macht man zuvor die Winkelprobe, und die Controle des Winkels AGF; gleichet die sich etwa vorfindende Differenzen aus; berechnet nun die Coordinaten, und aus diesen die Abscissenaxe AG; vergleichet dieselbe mit der gemessenen; und corrigiret nun die Coordinaten, nach (a.), wo sich Differenzen finden sollten.

Immer ist es übrigens sehr dienlich, wenn man sich zuvor die Figur nach dem Maaßstab und Transporteur entwirft; damit man die Rechnungsresultate mit den Dimensionen auf dem Papier vergleichen, und so sich immer recolligiren kann, wo man sich bey den Coordinaten eines Eckpunktes verrechnet haben sollte.

Uebrigens müssen alle Umfangslinien und Winkel mit der größten Genauigkeit gemessen werden, je mehr insbesondere die Figur derselben hat.

Man bewerkstelliget die Linienmessung zwar nur mit der Kette, und vollführet dort die Staffelmessung, wo sie nach dem Terrain nothwendig ist; und überzeugt sich von der Zuverlässigkeit der Messung durch das wiederholte Aufmessen der nemlichen Linie.

Wo die Kette über Schluchten gezogen werden müßte, wobey die Staffelmessung gar zu unsicher ausfallen müßte, kann der Geometer auch des sogenannten Distanzenmessers sich bedienen, durch welchen man aus einer Latte von gegebener Länge, ihren nächsten Abstand von dem Objectiv desselben finden kann; oder er kann auch solche Stücke einer Linie, trigonometrisch bestimmen, wo sich eine Grundlinie nebenbey genau messen läßt, und diese außerdem gegen jenes Stück eine Lage hat, wornach dieses sich noch mit erträglicher Genauigkeit aus dem Dreyeck berechnen lässet.

Das Problem von drey Puncten.

IV. Unter diesem Problem verstehet man bekanntlich die trigonometrische Bestimmung eines Punctes, von welchem aus man ein Dreyeck übersehen kann, das man nach seinen Winkeln und Umfangsseiten genau kennet, und dabey nicht größer ist, als daß sein sphärischer Excess §. 2. X. als verschwindend betrachtet werden kann.

Ist z. E. ABC in Fig. 26. dieses Dreyeck, welches man in D übersehen kann, und man will die Lage der Stelle D gegen das Dreyeck bestimmen, so mißt man in D die Winkel ADB und CDB; und berechnet die Abstände AD „ CD „ BD folgendermaßen:

Dabey ist nun einmal diese Berechnung in nächster Beziehung mit der Lage des Dreyecks ABC, gegen den Standpunct D selbst. Es kann nemlich dasselbe von dem Standpunct abfallen, wie in Fig. 26. Tab. II., oder statt dessen nach ihm zufallen, wie in Fig. 27. Tab. III., oder es können auch die drey Gegenstände A „ B „ C in einerley Verticalebene liegen, wie in Fig. 31.

Außerdem ist es möglich, daß der Standpunct D auch innerhalb des Dreyecks ABC sich befindet, wie in Fig. 28., oder er kann statt dessen in einerley Verticalebene mit dem A und B, wie in Fig. 29., oder auch zwischen B und C, wie in Fig. 30., sich befinden; so daß also bey diesem Problem sechs Fälle möglich sind.

a. Nehme ich nun unter diesen zuvörderst den ersten in Betrachtung, und setze, es sey in Fig. 26. in dem Dreyeck ABC bekannt der Winkel ABC = B, und die Seiten BC = a; AB = c; und der gemessene Winkel CDB = α; und ADB = γ; so ist die Summe aller 4 Winkel in dem Winkel ABCD gleich 360 Graden.

Setze ich ferner den Winkel CAD = x; so ist deswegen

B + x

$B+x+(\alpha+\gamma)+CBD=360$; $CBD=360-(B+\alpha+\gamma)-x=p-x$.
wenn man der Kürze wegen $360-(B+\alpha+\gamma)=p$ setzt.

Es ist ferner in dem

Δ. BAD.	Δ. BDC.
$\text{Sin ADB} : AB = \text{Sin BAD} : BD$	$\text{Sin BDC} : BC = \text{Sin BCD} : BD$.
$\text{Sin } \gamma : c = \text{Sin } x : BD$	$\text{Sin } \alpha : a = \text{Sin}(p-x) : BD$.
$BD = \frac{c \text{ Sin } x}{\text{Sin } \gamma}$	$BD = \frac{a . \text{Sin}(p-x)}{\text{Sin } \alpha}$.

also

$$\frac{c \text{ Sin } x}{\text{Sin } \gamma} = \frac{a . \text{Sin}(p-x)}{\text{Sin } \alpha}\text{; oder}$$

$$c . \text{Sin } \alpha \text{ Sin } x = a . \text{Sin } \gamma . \text{Sin}(p-x).$$

$$\frac{c \text{ Sin } \alpha}{a \text{ Sin } \gamma} = \frac{\text{Sin}(p-x)}{\text{Sin } x}.$$

Nun ist aber

$$\text{Sin}(p-x) = \text{Sin } p . \text{Cos } x - \text{Cos } p . \text{Sin } x\text{; also}$$

$$\frac{\text{Sin}(p-x)}{\text{Sin } x} = \frac{\text{Sin } p . \text{Cos } x - \text{Cos } p . \text{Sin } x}{\text{Sin } x} = \text{Sin } p \text{Cotang} x - \text{Cos } p;$$

mithin auch

$$\frac{c \text{ Sin } \alpha}{a \text{ Sin } \gamma . \text{Sin } p} = \frac{\text{Sin } p \text{ Cotang } x - \text{Cos } p}{\text{Sin } p} = \text{Cotang } x - \text{Cotang } p;$$

also

$$\text{Cotang } x = \text{Cotang } p + \frac{c \text{ Sin } \alpha}{a . \text{Sin } \gamma . \text{Sin } p}.$$

Johann Tobias Maier practische Geometrie, 1802. II. S. 298.

Hat man nach dieser Formel den Winkel $BAD = x$ berechnet, so ist auch $BCD = p - x$ bekannt, und man kann nun, in soferne die Winkel z und p nicht beinahe rechte sind, die Seiten AB„BD in dem Dreyeck ADB, und DC in dem Dreyeck BDC berechnen.

Es sey z. E. der Winkel gemessen worden der Winkel $B = 115°$; $BC = 2000$ Ruthen; $AB = 1112$; $\gamma = 25°$; $\alpha = 45°$; so ist einmal $p = 360 - (115+25+45) = 175$; also $\text{Cotang } p = \text{Cot}(90+85) = -\text{tang } 85 = -11{,}4300523$; ferner ist log

log c = 3,0461048	log a = 3,3010300
l. Sin α = 9,8494850—10	l. Sin γ = 9,6259483—10
	l. Sin p = 8,9402960—10
12,8955898—10.	1,8672743— 0.

2,8955898
1,8672743

1,0283155

Absolutzahl 10,67371; also

Cotang x = — 11,43005 + 10,67371 = — 0,75634; hiezu gehöret ein Winkel von 37°„6′„7″. Da aber die Cotangente des Winkels x hier negativ ausfällt, so ist der Winkel x selbst stumpf; mithin

x = 90 + 37„6„7 = 127°„6′„7″.

b. Befinden sich die Gegenstände A„B„C in einerley Verticalebene, wie in Fig. 31.; so ist hier der Winkel B = 180; mithin p = 360—(180 + α + γ) = 180—(α+γ). Behält man nun die vorigen Data bey, so findet sich hier der Winkel CAD = x = 57°„29′, ...

c. Liegt das nemliche Dreyeck ABC, wie in Fig.(27.) gegen den Standpunct D, so ist hier der Winkel B dem erhabenen ABDC oder 360 — B; BAD = x; und p = 360 — (360 — B + α + γ) = B—(α+γ); und man findet hier p = 115°—70 = 45°„0′; mithin Cotang p = Cotang 45 = tang 45 = 1; ferner ist

log c = 3,0461048.	log a = 3,3010390.
l. Sin α = 9,8494850—10.	log Sin γ = 9,6259483—10.
	l. Sin p = 9,8494850—10.
2,8955898.	2,7764633.

2,7764673.
2,8955898.

0,1191265.

Absolutzahl 1,31506;

mit-

mithin

Cotang x = 1+1,31506 = 2,31506; welchem der Winkel 66°„38′ zugehört. Daher ist Compl. x = 66„38; also

x = 90 — 66„38 = 23°„22′.

d. Je näher nun der Punct B des Dreyecks nach dem Standpunct D rücket, um so näher kommt der Winkel ABC dem Winkel ADC; er gehet in diesen über, wenn der B in den D selbst fällt.

Rückt nun B über D hinaus, so fällt von nun an der Punct D innerhalb des Dreyecks ABC, wie in Fig. (28.), und es ist nun ADB = γ; CDB = α; AB = c; BC = a; DAB = x; und p = 360—(B + α + γ).

Es sey z. E. BC = 4302; AB = 2900 Ruthen, und der Winkel ABC = B = 32°„0; γ = 98°„0; α = 145°„0′; so ist p = 360—(32 + 98 + 145) = 360—275 = 85°; und

Cotang p = Cotang 85°„0 = tang 5° = 0,08748.

log c = 3,4623980	log a = 3,6334685
l. Sin α = 9,7558913—10	log Sin γ = 9,9957528—10
	log Sin p = 9,9983442—10
3,2209893.	23,6275655—20.

13,2209893—10

3,6275655

9,5934238—10.

Absolutzahl = 0,39189.

Cotang x = 0,08748 + 0,39189 = 0,47937.

Diesem kommt zu der Winkel 25°„36′; also

x = Compl. x 25°„36 = 64°„24′.

e. Liegt der Standpunct D in der Verticalebene von A„B, wie in Fig. (29.), so ist hier ADB = γ = 180; BDE = α; und p = 360—(B+180+α) = 180—(B+α). Fällt statt dessen der Punct D in die Linie BC, wie in

Fig.

Fig. (30.), so ist hier $\alpha = 180$; und $p = 360 - (B + 180 + \gamma) = 180 - (B + \gamma)$.

f. Wollte man bey diesem Problem den Winkel (x) durch seinen Sinus finden, so ist auch in (a.)

$$\frac{\text{Sin } x}{\text{Sin } (p - x)} = \frac{a . \text{Sin } \gamma}{a . \text{Sin } \alpha}; \text{ oder}$$

$$\frac{\text{Sin } x}{\text{Sin } p . \text{Cos } x - \text{Cos } p . \text{Sin } x} = \frac{a . \text{Sin } \gamma}{c . \text{Sin } \alpha}.$$

Dividiret man den Vordersatz durch Sin α; so ist auch

$$\frac{1}{\text{Sin } p . \text{Cotang } x - \text{Cos } p} = \frac{b . \text{Sin } \gamma}{c . \text{Sin } \alpha} = M.$$

$$c \text{ Sin } \alpha = b . \text{Sin } \gamma . \text{Sin } p . \text{Cotang } x - b \text{ Sin } \gamma . \text{Cos } p;$$

$$\text{Cotang } x = \frac{c . \text{Sin } \alpha + b . \text{Sin } \gamma . \text{Cos } p}{b . \text{Sin } \gamma . \text{Sin } p .}; \text{ oder}$$

Da ferner

$$\text{Cotang } x = \frac{\text{Cos } x}{\text{Sin } x} = \frac{\sqrt{(1 - \text{Sin } x^2)}}{\text{Sin } x}; \text{ so ist auch}$$

$$1 - \frac{\text{Sin } x^2}{\text{Sin } x^2} = M^2; \quad 1 - \text{Sin } x^2 = x^2 . M^2.$$

$$\text{Sin } x = \frac{1}{\sqrt{1 + M^2}}.$$

Versuch das Studium der Mathematik zu erleichtern, S. 133. 1805.

§. 8.

Zuverlässigkeit der Distanzenmessung.

Bey trigonometrisch bestimmten Distanzen.

I. Wenn wir eine Distanz oder Linie unmittelbar mit Meßwerkzeugen messen, so lehret uns die Erfahrung, daß wir fast jedesmal für die Distanz ein anderes Resultat erhalten; und es hängen die dabey vorkommenden

Diffe-

Differenzen von dem Terrain, auf welchem gemessen wird, von den Meßwerkzeugen selbst, von ihrem sorgfältigen, und durch Uebung erlangten geschickten Gebrauch, und von dem Einfluß der Aenderungen der Luft während der Messungszeit ab.

Heben wir unter den für die Linie sich ergebenen Maaßen jene aus, die sich unter sich zunächst kommen, und nehmen unter diesen das arithmetische Mittel, so können wir dieses für das eigentliche Maaß der Linie selbst halten.

Ziehen wir dieses Mittel von dem größten und kleinsten gemessenen Maaß der Linie ab, so findet man in den Differenzen, die Gränzen, innerhalb welchen wir die Linie genau messen können.

Es haben sich z. E. für eine Linie folgende Maaße ergeben.

I. 13225,5. II. 13225,4. III. 13226; IV. 13225,8. V. 13225,7. VI. 13226,2. VII. 13224,9.

Unter diesen passen nun die Maaße I„ II„ IV„ V am nächsten zusammen; ihr Mittel 13225,6 kann daher für das adäquirte Maaß der Linie gelten. Zieht man dieses von dem größern 13226,2 und vom kleinsten 13224,9, so bleiben die Differenzen +0,6 und —0,7 übrig; und man weiß nun, daß das adäquirte Maaß der Linie höchstens um 0,6 oder $\frac{0,6}{13225,8}$ zu klein, oder statt dessen um 0,7 oder $\frac{0,7}{13225,8}$ des Ganzen zu groß seyn möchte.

Diese Quotienten drücken daher auch die Zuverlässigkeit aus, mit welcher man unter gegebenen Umständen, die Linie messen mochte.

Würden nun an beiden Enden dieser Linie zwey Winkel A und B nach einem entfernten Gegenstande C gemessen, mithin dieselbe als die Basis eines Dreyecks ABC angesehen, dessen Seiten a„ b„ c sind, so ist in demselben Sin C : c = Sin A : a; also

a =

$$a = \frac{c.\,\mathrm{Sin}\,A}{\mathrm{Sin}\,C} = \frac{c.\,\mathrm{Sin}\,A}{\mathrm{Sin}(180-(A+B))} = \frac{c.\,\mathrm{Sin}\,A}{\mathrm{Sin}\,(A+B)};$$

oder $\log a = \log c + \log \mathrm{Sin}\,A - \log \mathrm{Sin}\,(A+B).$

a. Würde man nun annehmen dürfen, daß die Winkel A„B, mathematisch richtig gemessen worden wären, so wäre in dieser Voraussetzung auch

$$\frac{da}{a} = \frac{dc}{c}.$$

Das ist: man würde in dem wahren Maaß der Linien $BC = a$, nun eben so viel, wie in dem wahren Maaß der Basis $AB = c$, ungewiß seyn; oder die Zuverlässigkeit, mit welcher man BC bestimmen kann, ist jener gleich, mit welcher man die Basis AB selbst messen könnte.

Könnte man statt dessen die Winkel A und B nur auf die Theile dA„dB sicher messen (VIII.), so ändern sich dadurch die Längen der Seiten BC„AC um so mehr, je größer die Winkel dA„dB sind, für welche man in dem wahren Maaß der Winkel A und B nicht mehr stehen kann.

Da nun nach dem Differentialcalkul ist

$d.\log \mathrm{Sin}\,\varphi = d\varphi.\mathrm{Cotang}\,\varphi$; $d.\log \mathrm{Cos}\,\varphi = -d\varphi.\mathrm{tang}\,\varphi$;

$d.\log \mathrm{tang}\,\varphi = \frac{2\,d\varphi}{\mathrm{Sin}\,2\varphi}$; $d.\log \mathrm{Cotang}\,\varphi = -\frac{2\,d\varphi}{\mathrm{Sin}\,2\varphi}$;

so ist auch in diesem Falle

$$\frac{da}{a} = \frac{dc}{c} + dA.\mathrm{Cotang}\,A - (dA+dB).\mathrm{Cotang}\,(A+B);$$

wobey die kleinen Differenzwinkel in Theilen des Halbmessers ausgedrückt werden müssen.

Will man diese in Theilen des Grades, oder in Secunden ansetzen, so ist auch

$$\frac{da}{a} = \frac{dc}{c} + \frac{dA.\mathrm{Cotang}\,A}{206264} - \frac{(dA+dB).\mathrm{Cotang}\,C}{206264}.$$

Es sey z. E. die Grundlinie zu 30000 Fußen, bis auf einen Fuß sicher, und die Winkel A = 46„30, B = 57°„40 gemessen worden; auch könne man in dem richtigen Maaß jedes solchen Winkels um dA = dB = 2 Secunden nicht stehen; man sucht die Zuverlässigkeit, mit welcher sich die Distanz BC = a ergiebt, wenn man annimmt, daß alles zu groß gemessen worden seye. Hier ist nun

tang d A = 0,3010300.	log (dA+dB) = 0,6020600.
l. Cotang A = 9,9721882-10	log Cot. C = 9,6519742-10
10,2732182-10	10,2540342-10
log 206264 = 5,3144552	log 206264. = 5,3144552
4,9587630-10	4,9395790-10
0,0000090942.	0,0000087012.

$$\frac{dc}{c} = \frac{1}{30000} = 0{,}0000333333.$$

$$\frac{da}{a} = 0{,}0000333333 + 0{,}0000090942 - 0{,}0000087012$$
$$= 0{,}00003472.$$

Da nun a = 23851 ist, so ändert sich diese Seite in diesem Falle um 23851. 0,00003472 = 0,765 Fuße; oder sie wird um diesen Theil länger.

Nimmt man statt dessen an, daß an dem Dreyeck alles zu klein gemessen worden seye, so ist für diesen Fall

$$\frac{da}{a} = -0{,}00003373 - 0{,}0000090942 + 0{,}0000087012$$
$$= -0{,}00003472.$$

und die Seite (a) wird nun —0,765 zu klein.

Unter solchen Umständen wird also die Bestimmung der Seite BC des Dreyecks nur auf 0,765 Fuße sicher; oder die Zuverlässigkeit, mit welcher man diese Seite trigonometrisch bestimmen kann, ist 0,765 Fuße; oder sie ist $\frac{765}{23851000}$ oder $\frac{1}{31178}$ des Ganzen.

b. Vertritt diese Seite die Stelle der Grundlinie eines andern Dreyecks, das sich an dieses unmittelbar anschlieſet, so ist für dasselbe nun $\frac{dc}{c} = 0{,}00003472$; statt des vorigen 0,00003333.

Es wachsen daher die Folgen der bey der Aufnahme der Dreyecke unvermeidlichen Fehler, wenn sie einander sämmtlich ähnlich wären, mit ihrer Anreihung an; oder die Zuverlässigkeit der Bestimmung des letzten Dreyecks ist um so geringer, aus je mehr Dreyecke sich dasselbe fundiret; oder das Dreyecknetz verschiebet sich um so mehr, je weiter es sich ausdehnet, und aus je mehr Dreyecken es sich in der nemlichen Ausdehnung constituirt.

Außerdem aber hängt die Zuverlässigkeit der Bestimmung der Seiten eines geradlinichten Dreyecks, noch von seiner Figur selbst ab; sie ist um so gröſser, je näher das Dreyeck gleichseitig ist.

Setzt man nemlich in obiger Differential-Formel $\frac{dc}{c} = 0$; oder nimmt die Grundlinie (c) für richtig gemessen an, so ist noch

$$\frac{da}{a} = dA\,\mathrm{Cot}A - dA.\mathrm{Cot}(A+B) - dB.\mathrm{Cot}(A+B).$$

Weil nun $\mathrm{Cot}\,\varphi - \mathrm{Cot}\,\psi = \frac{\mathrm{Sin}(\psi-\varphi)}{\mathrm{Sin}\,\varphi.\mathrm{Sin}\,\psi}$ nach der Trigonometrie ist, so ist auch

$$\frac{da}{a} = \frac{dA.\mathrm{Sin}\,B}{\mathrm{Sin}\,A.\mathrm{Sin}(180-(A+B))} = dB.\mathrm{Cot}(A+B).$$

Nimmt man ferner auch den Winkel B als richtig gemessen an, und berechnet nur die Folgen, welche der Differenzwinkel dA auf die Seite A hat, so ist auch

$$\frac{da}{a} = \frac{dA.\mathrm{Sin}\,B}{\mathrm{Sin}\,A.\mathrm{Sin}(180-(A+B)}.$$

Nach der Trigonometrie ist aber $\mathrm{Sin}\,\alpha.\mathrm{Sin}\,\beta = \frac{1}{2}\mathrm{Cos}(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\mathrm{Cos}(\alpha-\beta)$; mithin auch der Nenner dieses Bruchs $\frac{1}{2}\mathrm{Cos}(180-2A-B) - \frac{1}{2}\mathrm{Cos}(180-B)$.

Da

Da nun B für beständig angenommen wurde, so ändert der Winkel B in dem Nenner nichts, und es ist auf jeden Fall $\frac{da}{a}$ am kleinsten, wenn der Winkel $180 - 2A - B = 0$ ist, weil für diesen der Cosinus $= 1$ wird, oder seinen größten Werth erhält.

Hieraus ergiebt sich $A = 90 - \frac{1}{2}B$; und da $C = 180 - A - B$ ist, so ist auch $C = 180 - (90 - \frac{1}{2}B) - B = 90 - \frac{1}{4}B$; oder $A = C$.

Nimmt man nun B veränderlich und A beständig, so ergiebt sich auch $B = C$; mithin sind die Folgen der bey der Messuug der Winkel unvermeidlichen Fehler auf die Seiten des Dreyecks am kleinsten, wenn das Dreyeck selbst seiner Figur nach gleichseitig ist; sie sind dagegen um so bedeutender, je stumpfer der eine Winkel an der Grundlinie, oder auch je spitziger bey einem gleichschenklichten Dreyeck der parallactische, oder seiner Grundlinie gegenüber stehende Winkel ist.

Je mehr daher der Geograph darauf anträgt, sein Dreyecknetz aus Dreyecken zu construiren, die, so viel möglich ist, gleichseitig sind, um so geringer sind die Folgen der ihm bey seiner Aufnahme unvermeidlichen Fehler, oder um so zuverlässiger fället dasselbe aus; es fällt noch um so zuverlässiger aus, je geringer die Zahl der Dreyecke für die Ausdehnung des Netzes ist.

c. Bey der polygonometrischen Bestimmung einer Distanz AG Fig. 22. durch Traversen, können sich die bey jedem Winkel unvermeidlichen Fehler im unglücklichsten Falle anhäufen, oder sie können sich auch zufällig wechselseitig ganz, oder auch nur zum Theil, gegen einander aufheben.

In wieferne aber dieses Statt gefunden habe, findet sich aus der Controle des berechneten Winkels AGF, mit dem gemessenen! Passen diese gerade zusammen, so haben

ben sich sämmtliche Winkel-Differenzen gegenseitig aufgehoben; findet sich aber statt dessen ein Unterschied vor, so lässet sich dieser durch die Summe der gemessenen Winkel ausgleichen.

Wäre z. E. der Winkel AGF zu $57°\,„5'$ berechnet, und zu $57°\,„5'\,„24''$ gemessen worden, so trift auf einen Winkel in den andern eine Differenz von $\frac{21}{7} = 3$ Secunden.

Wollte man daher die Zuverlässigkeit berechnen, mit welcher man die Distanz AG in Fig. (22.) messen kann, so müßte man $d\alpha = 3''$; $d\beta = 2.3 = 6$; $d\gamma = 9$; $d\delta = 12$ Secunden setzen; und für die Linien AB„ BC„CD ... jene Werthe für $\frac{da}{a}$ „ $\frac{db}{b}$ nehmen, die ihnen nach den Umständen zukommen, unter welchen sie sich messen ließen.

Ist nun die Abscisse $Ab = a = a\,Cos\,\alpha$; oder $\log a = \log a + \log Cos\,\alpha$; so ist auch

$$\frac{da}{a} = \frac{da}{a} - d\alpha.Sin\,\alpha. = \frac{da}{a} + dA.Sin\,A.$$

Eben so ist auch $Bc = b = b.\,Cos\,\beta$; und

$$\frac{db}{b} = \frac{db}{b} - (dA + dB).Sin(A+B);\ \text{u. s. w.}$$

und man summiret am Ende die Werthe von da„db„dc. um die Folgen zu finden, welche die unvermeidlichen Fehler bei'm Linien- und Winkelmessen, auf die zu bestimmende Weite AG haben können.

d. Für ein sphärisches Dreyeck ABC, in welchem die Winkel A„C und die Seite (c) gegeben sind, ist ferner $Sin\,C : Sin\,a = Sin\,A : Sin\,c$; oder

$$Sin\,a.Sin\,C = Sin\,c.Sin\,A;\ \text{oder}$$

$$\log Sin\,a + \log Sin\,C = \log Sin\,c + \log Sin\,A;$$

mithin auch

$$da.Cos\,a + dC.Cos\,C = dc.Cos\,c + dA.Cos\,A.$$

wäre $dA = dC$; so ist auch

$$da.\text{Cot}\,a = dA.(\text{Cot}\,A - \text{Cotang}\,C) + dc.\text{Cot}\,c\text{; also}$$

$$da = \frac{dA}{\text{Cot}\,a} \cdot \frac{\text{Sin}\,(C-A}{\text{Sin}\,C.\,\text{Sin}\,A} + \frac{dc.\,\text{Cot}\,c}{\text{Cotang}\,a}\text{; oder}$$

$$da = \frac{dA.\text{Sin}(C-A).\text{tang}\,a}{\text{Sin}\,C.\,\text{Sin}\,A} + dc.\text{Cotang}\,c.\text{tang}\,a.$$

in welcher Formel die Differenzen dA„dc in Theilen des Grades ausgedrückt werden.

Messung gerader auf dem Papier gezogener Linien.

II. Sind zwey Puncte α„β auf dem Papier mit der Punctirnadel äußerst fein eingestochen, deren Abstand der Geograph nach einem gewissen Maaßstab messen, oder angeben soll; so faßt er die 2 Puncte mit den Spitzen seines Stangencirkels, im Fall die Schenkel seines Handcirkels nach dem Abstand der Puncte eine zu schiefe Stellung erhalten müßten; setzt nun die Spitzen des Cirkels auf dem Maaßstab ein, und lieset auf ihm die Theile ab, die er für diesen Abstand der Cirkelspitzen angiebt, welche die verlangte Distanz der Puncte α„β ist.

a. Nun ist aber der Geograph bey diesem Verfahren in der Oeffnung des Cirkels vorerst nur auf jenen Theil gewiß, für welchen er nach seinem Gefühl nicht stehen kann, ob die Spitzen des Cirkels genau in die Mitte der für α„β in das Papier gestochenen Puncten sind oder nicht; wenn auch das Papier straff angespannt ist.

Dieß ist auch der Fall, wenn er auf einem Maaßstab eine Linie abnimmt, in dessen Substanz die Theilstriche eingerissen sind.

Ist statt dessen eine Linie α„β mit der Tusche auf das Papier gezogen, welche mit dem Maaßstab gemessen werden soll, so kann der Geograph einmal an jedem Ende

der

der Linie für einen Theil nicht stehen, ob die Cirkelspitzen wirklich diese Enden erreichen, der seinem Auge nahe zu verschwindend ist, §. 3. I. a., nach der Deutlichkeit, in welcher er die Linie im Ganzen, und insbesondere ihre Enden siehet, wenn auch die Cirkelspitzen sich in die feinsten Spitzen verlaufen; er kann also die Linien um einen solchen Theil hinten und vorn zu kurz oder auch zu lang nehmen.

Indem ferner der Geograph die Enden der Linie mit den Cirkelspitzen faßt, muß er darauf antragen, die Mitte derselben auf die Enden der Linie zu bringen; dabey aber bleibt er immer auf jenen Theil ungewiß, um welchen er sich nach seinem Augenmaaß verschätzen kann, und dieser Theil ist der Erfahrung zufolge um so größer, je näher die Spitze nach ihrer Feinheit dem Puncte kommt, welcher den Augen unter den gegebenen äußern Umständen verschwindend ist.

Deswegen pfleget man an den Stangencirkel Gläser anzubringen, welche die Spitzen vergrößern, damit man ihrer Stellung nach dem Augenmaaß sicherer wird.

Will sich daher der Geograph überzeugen, mit welcher Genauigkeit er eine Tuschlinie auf dem Papier mit dem Cirkel abnehmen kann, so muß er dieselbe öfters zwischen den Cirkel nehmen, und das Cirkelmaaß mehrmalen umschlagen.

Würde er die Linie mathematisch richtig abnehmen können, so müßten auch ihre gleichzahlige Umschläge, Linien von gleicher Länge geben; ist dieß aber nicht, so kann er aus ihren Differenzen die Zuverlässigkeit, mit welcher er die Linie zwischen die Cirkelspitzen fassen kann, um so besser abnehmen, je mehr Versuche dieser Art er bereits in dieser Absicht angestellt hat.

b. Um aber auch die Zuverlässigkeit der Aufnahme einer solchen Linie, nach theoretischen Principien zu erwägen, nehme ich an, die stählernen Spitzen des Stangen-

cirkels seyen so fein, daß sie im Metall eine Linie von $\frac{1}{5000}$ Fuß in der Breite einziehen würden: diese Spitzen aber werden durch die an den Gehäusen der Stiften angebrachte Luppe gerade (5) mal vergrößert.

Unter solchen Umständen sehe ich daher jede Cirkelspitze in der Breite von $\frac{1}{1000}$ Fuß; und da ich für solche kleine Intervalle, nach §. 3. bis auf $\frac{1}{12}$ derselben in ihrer Bisection nach dem Augenmaaß mich verschätzen kann, so kann ich deswegen die Mitte der Cirkelspitzen an jedem Ende der Linie nur bis auf $\frac{1}{1200}$ Fuß sicher einsetzen; mithin in der Abnahme der Linie nur auf $\frac{1}{600}$ Fuß gewiß seyn.

Bringe ich nun dieß abgenommene Maaß auf den Transversalmeßstab, um es nach Theilen desselben anzusprechen, so kommt es darauf an, ob die eine Spitze genau in eine seiner Transversalen einpasset oder nicht.

Ist nun ersteres der Fall, so bleibe ich auf jenen Theil in dem Ansprechen des Maaßes der Linie ungewiß, für welchen ich nach meinem Gefühl nicht stehen kann, ob die Spitzen auch wirklich in die Mitte der Linien des Maaßstabes einpassen, oder diesen nur zunächst einpassen.

Dieser Theil ist daher um so kleiner, je feiner die Linien des Maaßstabs gezogen sind, und je feiner das Gefühl ist.

Fällt statt dessen das aufgenommene Maaß zwischen zwey Parallelen des Maaßstabes hinein, so muß ich nach meinem Augenmaaß den Theil des Ganzen schätzen, um welchen die eine Spitze den ganzen Theil excedirt; welche Schätzung aber um so unsicherer ist, je weiter die Parallelen von einander abstehen.

Bey so bewandten Umständen ist es daher wohl möglich, in der Länge der mit einer Cirkelöffnung abgenommenen schwarzen Linie auf dem Papier, um $\frac{1}{5000}$ eines Fußes zu fehlen.

c. Kann die Linie mit dem Cirkel nicht auf einmal überspannt werden, so nimmt man gewöhnlich den verjüngten Maaßstab, nach welchem man sie messen soll, ganz ab, und schlägt diesen auf der Linie so oft um als es angehet: und mißt das Decedens oder Excedens besonders.

Wäre nun der Theil, um welchen der Geograph bey Abnahme des Maaßstabs selbst nach seinem Gesicht ungewiß bleibt $\frac{1}{v}$ eines landüblichen Fußes, und der Cirkel müßte (μ) mal umgeschlagen werden, so ist der Theil, für welchen der Geograph auf dieser Strecke nicht stehen kann, $\frac{\mu}{v}$ eine Einheit jenes Fußes. Kann er außerdem auch noch in dem Excedens der Linie noch um $\frac{1}{p}$ Fuß fehlen, so ist der Theil, um welchen er in der Länge der Linie fehlen kann, $\frac{\mu}{v} + \frac{1}{p}$ eines Fußes.

d. Dieser Theil deckt aber auf dem verjüngten Maaßstab immer einen oder etliche verjüngte Fuße, oder auch einen Theil eines solchen Fußes, je nachdem der verjüngte Fuß auf den Maaßstab selbst klein oder groß ist.

Ist z. E. der Maaßstab so eingetheilt, daß auf ihm 1000 seiner verjüngten Fuße gerade 0,682 eines Nürnberger Fuße messen, so hat auf ihm ein verjüngter oder Charten-Fuß die Größe von $\frac{0,362}{1000}$ oder $\frac{362}{1000000}$ eines Nürnberger Fußes.

Kann ich nun die Linie $\alpha\beta$ auf dem Papier bis auf $\frac{1}{5000}$ eines Nürnberger Fußes abnehmen, so ist

$$\frac{362}{1000000} : \frac{1}{5000} = 1 : x; \quad x = 1,81.$$

das ist: ich könnte die Linie $\alpha\beta$ auf der Charte nur bis auf 1,81 Charten-Fuße sicher abmessen.

Hätte

Hätte ich nun diese Linie zu 975 Charten-Fußen gemessen, so kann ich des wahren Maaßes dieser Linie nur bis auf $\frac{1,81}{975}$ Charten-Fuße gewiß seyn.

Je kürzer daher die Linie $\alpha\beta$ auf der Charte ist, um so unzuverlässiger fällt ihre Abmessung für den nemlichen Maaßstab aus; sie fällt in der nemlichen Länge um so unzuverlässiger aus, je kleiner der Charten-Fuß nach Umständen angenommen werden muß.

e. Hat statt dessen der Geograph das trigonometrische Maaß einer Distanz (I.) aufs Papier zu tragen, so nimmt er für die berechneten Fuße eben so viel Charten-Fuße auf dem verjüngten Maaßstab mit dem Cirkel ab, und trägt diese aus dem Anfangspunct der gezogenen Linie auf diese selbst; er bleibt dabey der Distanz um so viel Theile eines Charten-Fußes gewiß, als der Theil deckt, für welche er nach seinem Gesicht in der Abnahme der Charten-Fuße nicht mehr stehen kann (a.).

Kann die Distanz von dem Cirkel auf einmal nicht überspannt werden, so nimmt man den ganzen Maaßstab mit dem Cirkel ab, und überschlägt denselben auf der Linie so oft es angehet; wornach sodann der positive oder negative Ueberschuß der Linie noch besonders angesetzt abgezogen wird.

Kann nun der Geograph in der Aufnahme des ganzen Maaßstabs nach seinem Gefühle, um (u) Charten-Fuße fehlen, und muß (p) Umschläge machen, so kann er auch in dem Auftragen der Linie auf das Papier um $(p \pm 1)$. u. Charten-Fuße fehlen.

Hygrometrische Aenderung einer aufs Papier gezogenen Linie.

III. Das Papier als eine hygrometrische Substanz, sauget das Wasser und andere Flüssigkeiten so lan-

lange ein, bis es durch dieselbe seinen Sättigungszustand hergestellt hat: es sauget derselben in gegebener Quadratfläche um so mehr ein, je stärker oder dicker, und lockerer es nach seiner Substanz ist.

Nun wird aber bei'm Papiermachen der Zeug immer in Formen von geflochtenem Drath geschöpft, die in ihrer Länge zur Festhaltung des Ganzen, stärkere Dräthe haben: es gewinnt durch diese Dräthe der geschöpfte Bogen durch seine ganze Länge, parallele Streifen oder Rippen, an deren Stelle der Papierbogen in so weit dünner als auf der übrigen Fläche wird, als jene Dräthe oder Stege über die übrigen eminiren.

Wird nun nachgehends das Papier zwischen den Filzen zusammengepreßt, so empfinden die Rippen den Druck weniger; sie bleiben daher um so lockerer in ihrer Substanz, je breiter und dünner sie in Vergleich mit dem übrigen sind; sie saugen daher das Wasser auch um so mehr ein, je lockerer sie ihrer Substanz nach sind.

Die Einsaugung einer flüssigen Substanz durch eine feste, habe ich insbesondere in meiner Statik und Dynamik der Physik, Abtheilung II. Nürnberg bey Palm 1813., betrachtet.

Wird das gesättigte Papier der Luft ausgesetzt, die ihren Sättigungszustand noch nicht gewonnen hat, so sauget diese nach ähnlichen Kräften, die nassen Theile des Papiers als ihr incolirende in sich, welche dieses fahren lassen kann; und es begeben sich die Papiertheile dadurch um so näher zusammen, je mehr sie zuvor nasse Theile in sich eingesogen hatten; es schwindet das Papier während seines Trocknens um so mehr ein, je größer seine Fläche ist, und je mehr es nach seiner Stärke und Lockerheit zur Herstellung seines Sättigungszustandes bedarf; es schwindet insbesondere in der auf seine Rippen senkrechten Richtung um so mehr, als nach der mit denselben

paral-

parallelen ein; je näher sich die Rippen, und je breiter und lockerer sie als die übrige Papiersubstanz sind.

a. Wenn daher eine Linie die Rippen des Papiers senkrecht überschneidet, so ändert sich mit zunehmender oder abnehmender Feuchte des Papiers, ihre Länge nach der hygrometrischen Veränderung seiner Substanz im Ganzen, und der besondern oder speciellen seiner Rippen.

So trug ich z. E. auf einen Bogen gewöhnlichem Schreibpapier eine Linie von 1,280 Theilen des Nürnberger Fußes, senkrecht auf seine Rippen, und eine andere von gleicher Länge parallel mit denselben; erstere überschnitt 14 Rippen, jede zu $\frac{3}{1000}$ dieses Fußes, oder 3 Scrupeln. Als ich nachgehends den Bogen mit nassem Schwamm überfuhr, dehnte er sich dermassen aus, daß die erstere Linie 1306 Theile; die mit den Rippen parallele aber nur 1298 Theile maß. Die 14 Rippen hatten sich also in einer Breite von 3.14 oder 42 Theilen, um 8 Theile mehr als das übrige Papier gestreckt.

Wenn daher eine Linie von 300 solcher Theile 3 Rippen senkrecht überschneidet, so ist einmal ihre Länge nach der hygrometrischen Veränderung der Papiermasse

1280: 1298: 300: x; $x = 304{,}22$; und außerdem die Aenderung durch die Rippen

$14 : 3 = 8 : n : n = \frac{24}{14} = 1{,}71$; mithin die Länge der Linie im Ganzen $304{,}22 + 1{,}71 = 305{,}93$ solcher Theile des Nürnberger Fußes. Wirklich hatte ich sie auch zu 306 gemessen; und es verhielt sich eben so auch mit Linien, welche mehr und weniger Rippen senkrecht überschnitten.

b. Anders verhält sichs, wenn die Linie die Rippen des Papiers schief überschneidet; denn sie verändert in diesem Fall ihre gerade Richtung, und krümmet sich nach einer gewissen Curve.

Es sey z. E. in Fig. (32.) Am die Breite des Papiers parallel mit seinen Rippen und CN seine Länge senkrecht auf diese; AB eine auf dem Papier gezogene gerade Linie, die mit der Richtung Am den Winkel $CAB = \varphi$ macht.

Wird nun das Papier durch die Einsaugung der nassen Theile der Luft feuchter als es zu der Zeit war, wie die Linie AB nach dem Maaßstab aufgetragen wurde, so würde der Punct B von B nach E um EB sich verschieben, wenn er nicht gleichzeitig auch von B nach D sich verschieben müßte. Da er nun weder der einen noch der andern Richtung einseitig folgen kann, so verschiebt er sich nach der Diagonale BF derselben, und kommt so von B nach F; und eine gerade von F nach A macht nun mit der AC den Winkel $CAB + BAF = \varphi + \Delta\varphi$.

Mißt nun die Breite Am der Charte (p) und ihre Länge CN gerade (q) Chartenfuße, und ändert sich erstere um (f) und letztere um (h) solcher Fuße; so ist einmal

$$p:f = AC:BE; \quad BE = \frac{f}{p} . AC. = \frac{f}{p} . AB. \cos\varphi;$$

und es läßt sich eben so auch BD nach (a) mit Zuziehung der speciellen Rippenausdehnung berechnen.

Es ist ferner $\text{tang}\, CAB = \text{tang}\, \varphi = \frac{BC}{AC}$; und

$$d.\text{tang}\,\varphi = \frac{d\varphi}{\cos\varphi^2} = \frac{AC.d.BE - BC.d.AC}{AC^2}; \text{ oder}$$

$$d\varphi = \left(\frac{AC.BD - BC.BE}{AC^2}\right) \cos\varphi^2; \quad \text{oder}$$

$$d\varphi = \left(\frac{AB.\cos\varphi.BD - AB\sin\varphi.BE}{AB^2.\cos\varphi^2}\right) \cos\varphi^2$$

$$= \left(\frac{BD.\cos\varphi - BE.\sin\varphi}{AB.}\right) 206264 \text{ in Secunden.}$$

Nach diesem kann also der Geograph die Aenderung der Lage des einen Endpuncts einer geraden Linie, die er auf die Charte bey einem gewissen Feuchtigkeitsgrad

der

der Luft gezogen hat, überschlagen; wenn er bereits Versuche über die hygrometrische Ausdehnung seiner Charte angestellt hat.

Da aber diese Aenderungen auch selbst noch bey englischen Velin-Papier, das keine Rippen hat, immer noch bedeutend sind, so bleibt es stets räthlich, die technischen Arbeiten auf dem Papier nur in solchen Zeiten vorzunehmen, in welchen die Luft nach der Anzeige irgend eines Hygrometers die nemliche Feuchte hat; es wird statt dessen die Lage der aufgezeichneten Puncte um so mehr variiren, mithin die Charte um so schlechter ausfallen, je weniger man auf die hygrometrische Ausdehnung des Papiers achtet.

c. Wird das Papier in feuchtem Zustand auf einem Reißbrett überspannet, und an seinem Rande fest geleimt, so strecket es sich durch seine eingesogene nasse Theile, und durch die Kraft, mit welcher es angespannt wird; und strebet sich wieder um so stärker zusammen zu ziehen, je trockener es nachgehends wird; es zeiget sich dort ein Einlauf oder Riß, wo die Cohärenz der Papierstoffe geringer als die Kraft ist, mit welcher das Papier sich zusammen zu ziehen strebet.

Schneidet man das Papier nachgehends vom Reißbrett ab, so lauft es ungehindert ein, und alle auf ihm gezogene Linien werden kürzer. Es ist daher räthlich, daß man immer den Maaßstab der Charte auf dieselbe noch vorzeichnet, ehe man sie vom Brett abschneidet, damit auch dieser sich ebenmäßig mit dem Ganzen ändert; wenn man nicht lieber auf einem Papier operiret, das nicht aufgespannt, sondern nur durch da und dort durch aufgelegte Gewichte in gehöriger Ebene erhalten wird.

Bey meiner Charte vom Gebieth der ehemaligen Reichsstadt Nürnberg hatte ich 1000 Meter zu 0,362 eines Nürnberger Fußes angenommen. Als ich nun am

Ende

Ende das englische Velin-Papier vom Brette abschnitt, schwand es auf der Stelle dermaßen ein, daß 1000 Meter nur noch 990 auf meiner Schraubenmaschiene maßen.

Aufnahme des Muttermaaßes.

IV. Bey der geographischen Aufnahme eines Staates, wird dem Geographen gewöhnlich der landübliche Fuß, oder das Muttermaaß übergeben, nach welchem er seine Arbeiten verrichten muß.

Dieses bestehet gewöhnlich in einer eisernen viereckichten Stange, die an ihren Enden senkrecht auf ihre Axe abgeplättet ist; und der Geograph muß nach derselben seine Meßruthen reguliren, mit welchen er solche Linien unmittelbar mißt, die er für seine Absicht am dienlichsten erachtet.

Da nun für die Fertigung jener Meßruthen, der landübliche Fuß um so öfter umgeschlagen werden müßte, je länger diese Ruthen gefertiget werden mögen, und die Abnahme desselben mit dem Stangencirkel nach (II. e.) immer unsicher ist, so muß der Geograph andere Mittel einschlagen, um seine Meßruthen nach dem Muttermaaße mit möglichster Genauigkeit zu bestimmen.

a. Diese Mittel aber ergeben sich einzig durch das Abschieben zweier gleicher Muttermaaße A „B, von welchen der Geograph das eine B erst bearbeiten lassen muß, wenn ihm nicht schon zwey durchaus gleiche eingeliefert werden können; wozu folgendes Verfahren am dienlichsten seyn möchte.

Vorerst muß sich der Geograph nach einem ebenen gepflasterten Boden, oder auch nach einer alten beständig im Schatten liegenden Mauer umsehen, die er aber oben ganz planiren läßt, nachdem er zuvor einen eisernen viereckichten Zapfen (α) in dieselbe gehörig befestiget hat.

Er

Er muß ferner eine Docke von Metall machen lassen, die mit ihrer Grundfläche auf der planirten Mauer flach aufliegt, und durch ein Gewicht auf sie feste gedrückt wird.

Diese Docke muß an ihrer verticalen Wand eine Oeffnung haben, in welcher ein rechtwinklichtes Kniestück in einer Axe sich drehet, dessen langer Arm ungefähr 50mal länger als sein kurzer ist; es spielet das Ende des langen Arms an einen auf der Mauer verschiebbaren Aufsatz C an, der dort einen Strich oder das Zero eine feine Eintheilung hat, wo der lange Arm anspielet, wenn sein kurzer Arm senkrecht auf die Mauer stehet.

Nun schiebet der Geograph sein Muttermaaß an den Stiften (α) der Mauer, mit dem einen Ende, und an das andere die Docke in soweit an, daß, indem ihr kurzer Arm das Ende ganz berühret, die Spitze des langen Arms an dem Zero des Aufsatzes anspielet.

Ist nun das eine Maaß B dem A so viel möglich vorläufig gleich gemacht, so hebt er das A von der Mauer ab, leget statt dessen das B an seine Stelle, und lässet sein vorderes Ende so lange abplätten, bis es ganz in die Lehre oder Chablons dermaßen passet, daß der lange Arm an dem Zero einspielet, es mag das A oder das B in die Lehre eingelegt werden.

b. Hat sich nun der Geograph auf diese Art der gleichen Länge von A und B für einerley Temperatur versichert, die er sich notiret, so schiebet er das A an den Stift (α) der Mauer, über der auf dieser gezogenen geraden Linie an, beschweret diese in der Mitte mit einem Gewicht, nimmt die Docke ab, und stößet die B an das vordere Ende der A an.

Nun beschweret er die B, nimmt die A ab, und stösset sie an die B: er beschweret nun wieder A, und stößet die

die B von neuem an: er fährt mit diesem Abschieben so lange fort, bis er sein Ruthenmaaß completirt hat.

Ist nun dieses; so wird die Docke wieder angeschoben, daß ihr langer Arm das Zero schneidet, und so durch das Stück (α) und den kurzen Arm der Docke die Gränzen der Ruthe, oder ihr Etalons bestimmt für die gegebene Temperatur, unter welcher dieses Geschäfte vollbracht wurde.

Nach diesem probiret der Geograph die schon vorläufig gefertigte Meßruthen, in dieser Lehre, bey der vorigen Temperatur; er erkennet dabey jene für verificirt, wenn der lange Arm der Docke das Zero schneidet, wenn das eine Ende der Ruthe das Stück (α), das andere aber den kurzen Arm der Docke ganz berühret; er läßt von der Ruthe an ihrem einen Ende nach und nach so viel abschleifen oder abnehmen, bis sie als verificirt angesprochen werden kann; oder notirt sich statt dessen die verschiedene Längen der Stangen nach ihren Nummern.

c. Da ferner diese metallene Ruthen in ihrem Dienst bey Temperaturen gebraucht werden können, die höher oder niedriger, als die Temperatur ihrer Verification sind, so muß deswegen auch der Geograph die pyrometrische Veränderung ihrer Längen aufs genaueste untersuchen und sich notiren.

Er erhitzet deswegen eine eiserne, mit der Ruthe fast gleich lange Schiene, bringt sie auf die Verifications-Mauer, zwischen den unverändert belassenen Etalons, leget die Ruthe darauf, und siehet an der Vorrichtung C nach, um wie viel Zolle und Theile desselben der Zeiger des Kniestücks heraufgestiegen seye, bey der Temperatur, welche die Ruthe in ihrer ganzen Oberfläche angenommen hat: er attendiret ferner den Stand des Zeigers, so wie die Temperatur der Ruthe nach und nach

mit

mit ihrer Erkältung abnimmt, und fertiget sich nachgehends aus den abgenommenen Datis, die pyrometrische Scale für jede seiner Ruthen.

Diese Scale wird um so zuverlässiger, je länger der eine Arm des Kniestücks gegen seinen kurzen wird; es ändert sich die Länge der Stange um $\frac{1}{50}$ einer Linie, wenn der lange Arm 50mal länger als der kurze ist, und dieser auf der Vorrichtung C um eine ganze Linie oder $\frac{1}{12}$ Zoll steigt, oder sinkt.

Wo der Geograph sich der erhitzten eisernen Schiene nicht bedienen will, kann er auch die pyrometrische Veränderung seiner rectificirten Stangen in einem Zimmer untersuchen, das er auf verschiedene Temperaturen heizen läßt; er wird dabey der regulairen oder über die ganze Stange ebenmäßig verbreiteten Temperatur um so gewisser, je mehr die Zugluft im Zimmer abgeschnitten ist, und je mehr er Bedacht nimmt, die Stangen nicht unmittelbar mit den Händen, sondern mit hölzernen Zangen zu dirigiren; weil der Erfahrung zufolge die Wärme der Hand eine Stange von 16 Fußen schon merklich ändert.

d. Nach diesem Verfahren fand Hr. Prof. Schieg für eine seiner eisernen Meßstangen, mit welcher er nachgehends die Basis zwischen St. Johannis bey Nürnberg und Bruck maß, folgende Längen für gewisse Temperaturen, nach dem Meter-Definitiv, zu 443,296 Pariser Linien bey der Temperatur o nach Reaumur.

Grade.	Längen.	Grade.	Längen.
o	4,0000841.	5	4,0004075.
1	. . . 1488.	6	. . . 4722.
2	. . . 2135.	7	. . . 5369.
3	. . . 2781.	8	. . . 6015.
4	. . . 3428.	9	. . . 6662.

Gra-

Grade.	Längen.	Grade.	Längen.
10	4,0007309.	19	4,0013129.
11	. . . 7956.	20	. . . 13776.
12	. . . 8602.	21	. . . 14423.
13	. . . 9249,	22	. . . 15070.
14	4,0009896.	23	. . . 15717.
15	4,0010542.	24	. . . 16363.
16	. . . 11189.	25	. . . 17010.
17	. . . 11836.	26	4,0017657.
18	. . . 12483.	—	

Als ich nach diesen Datis eine Scale zeichnete, deren Abscissen die Thermometer-Grade und die ihnen entsprechende Ordinaten die Längen der Stange nach dem Meter sind, so zeigte sich bald, daß die Scale ganz logistisch seye; es paßt diese Curve selbst noch für die äußersten Temperaturen der Stange.

Hebe ich nemlich die Ordinaten für 20°, 10 und 0 Grade aus, und suche aus diesen die Länge der Stange für 0 Grade, so ist nach der Natur der Logistik

4,0013776 : 4,0007309 = 4,0007309 : 4,0000842.

Die Rechnung, welche volle 20 Grade überspringt, trift also ganz mit der wirklichen Abmessung der Stange bey 0 Graden überein; und bestättiget dadurch das geometrische Gesetz der pyrometrischen Ausdehnung der Stange.

Hat der Geograph nach seiner Scale das Gesetz der pyrometrischen Ausdehnung des Metalls für jede seiner Stangen gefunden, so kann er die Länge jeder unter verschiedener Temperatur mit derselben gemessene Linie auf eine gewisse Normaltemperatur reduciren; er kann selbst, wenn er nach Umständen nicht Gelegenheit hätte, die Länge seiner Stangen bey dieser Temperatur zu messen, ihre Länge bey derselben nach jener Scale berechnen.

Diese

Diese Normaltemperatur ist für metallene Stangen, gewöhnlich die des Eispunctes, oder des eben gefrierenden Wassers; es reducirt daher der Geograph die Länge seiner Meßruthen sämmtlich auf diesen Punct, wo er wegen der Zeit, um welche die Grundlinie gemessen werden muß, diese Temperatur der Atmosphäre nicht abwarten kann.|

Bey hölzernen Meßruthen muß die Scale ihrer hygrometrischen Veränderung durch Versuche construirt werden; und man nimmt bey ihrem Gebrauch einen gewissen normalen Feuchtigkeits- und Wärmegrad der Luft, nach einem gegebenen Hygrometer und Thermometer an.

§. 9.

Absteckung der Diagonale eines Landes.

Wo sich in einem geographisch aufzunehmenden Staat eminente Gegenstände, z. E. Berge, Thürme, durch welche sich eine Verticalebene durch denselben abstecken lässet, so muß meines Erachtens, eines der ersten Geschäfte des Geographen die Absteckung jener Ebene seyn.

Denn einmal sichert ihn diese Linie gegen das Verschieben seines Hauptdreyecknetzes, §. 5. V. b., wenn er seine Operationen in derselben beginnet und fortsetzet; sie sichert ihn um so besser gegen diesen unvermeidlichen Umstand, je näher sie den Staat selbst in seiner Mitte durchschneidet: er kann außerdem, wo es angehet, die Grundlinie in diese Ebene legen, oder wenigstens sie in dieselbe reduciren: er kann, wo die Diagonale große Ebenen durchschneidet, mehrere Grundlinien in ihr unmittelbar, oder auch durch Traversen §. 5. I. messen, und seine Messung durch diese controliren: er kann selbst, wenn auch die Umstände für die Messung der Grundlinien nicht günstig seyn sollten, durch dieselbe eine aus-

ausgedehnte Winkelprüfung seines Triangularnetzes bewerkstelligen, und so dasselbe um so zuverlässiger construiren.

Kann an einer Stelle dieser Diagonale, an welcher man in ihr die weiteste Aussicht hat, eine andere sie durchschneidende Diagonale abgesteckt werden, so fördert diese noch um so mehr die Genauigkeit der Aufnahme des Triangularnetzes, da diese zwey Diagonalen den Staat in 4. Haupt-Sectionen abtheilen, deren jede isolirt von der andern aufgenommen werden kann: es sind dabey die Folgen der unvermeidlichen Fehler um so unbedeutender, in je weniger Hauptdreyecke eine jede Section zerfallen kann.

Eine solche Diagonale wird nun nach den Regeln, welche die elementare Geodäsie lehret, abgesteckt; man verlängert sie vor- und rückwärts durch zwey in ihr liegende Objecte; oder wenn diese an den Gränzen des Staates, oder auch eines benachbarten Staates sind, wird die Linie auch zwischen denselben abgesteckt; nur bedienet sich hiezu der Geograph der Signalbäume, §. 4. IV. c., oder auch der Nachtfeuer, §. 4. IV. d., in soweit diese angewandt werden können; wo statt dessen der Geodät die Backen, oder sogenannten Fluchtstangen oder Piquets gebrauchet; er traciret wie dieser seine Diagonale durch Waldungen, wo die Linie auf solche stößet, in soferne der Wald nicht von einer hinter ihm liegenden Station ganz übersehen werden kann: er endet die Linie erst dort, wo ihre weitere Verlängerung in dem Staate, nach Umständen unmöglich wird.

Solche Linien, wo sie selbst nur in einer Section als specielle abgesteckt werden können, sind für die Prüfung der Sectionsaufnahme öfters von großem Nutzen, wenn sie auch nicht die ganze Section durchschneiden sollten.

Verlängerung der Verticalebene zweier Objecte.

I. Will der Geodät eine gerade Linie durch zwey Fluchtstangen A und B, die er zu gewissem Zweck auf seinem Terrain aufgesteckt hat, vor- oder rückwärts verlängern, so bringet er vorerst eine dritte C an eine Stelle, an welcher ihm dieselbe die vorigen A und B zu decken scheinet, wenn er rechts und links an den Seitenflächen der Stangen mit einem Sackperspectiv vorbey siehet: er stecket eben so eine vierte Stange D dorthin, wo ihm diese mit den übrigen in gerader Linie zu seyn scheinet; u. s. w.

Dabey richtet sich nun der Abstand der Stange C von der ihr nächsten B nach der Deutlichkeit, in welcher er die Stange B, und insbesondere die A siehet; er stecket die C dorthin, wo er die Stange A gerade noch erkennen kann.

Für die Stange D vertritt die Stange B die Stelle der A; und der Geodät stecket seine gerade Linie um so sicherer ab, je mehr Stangen bereits in derselben ausgesteckt sind, die er noch erkennen kann.

a. Eben so verfährt auch der Geograph bey Absteckung seiner Diagonale; nur sind für ihn die Visierpuncte A und B eminente Felsenspitzen, oder auch auf Bergen stehende Thürme, oder isolirte Bäume, Signal-Pyramiden; die er durch seinen Achromat siehet; er stellet seinen Achromat von dem Object B das erstemal in C so weit ab, als er das Object A durch denselben noch erkennen kann; und läßt in C einen Signalstamm mit seiner Trommel aufs genaueste senkrecht in die Mitte der Stelle setzen, und gegen den Sturm befestigen, wo ein in der Axe des Fernrohrs hängender Senkel den Boden anspielet, indem er A und B in gerader Linie siehet.

Die-

Dieser Abstand der Stelle C von dem Objecte B ist nun um so größer, je größer der Durchschnitt des Objectes A an und für sich ist, und je besser es sich nach seiner Farbe und Erleuchtung auf seinem Hintergrund präsentiret; je langsichtiger und schärfer ferner sein Gesicht, je größer die Lichtstärke bey gegebener Vergrößerung seines Achromats, und je dünner und durchsichtiger die Luft zur Zeit der Operation ist.

Rücksichtlich dessen lehret nun die Erfahrung, daß bey heiterer Luft, selbst ein kurzsichtiges Auge die Trommel, von 3 Fuß Querschnitt eines Signalstammes §. 4. IV. mit einem vortreflichen Achromat von 18 Zollen von Frauenhofer bey 32maliger Vergrößerung auf 16 Stunden weit noch gut erkennen kann; es erkennet dieß Auge noch ganz gut, in einem Abstand von 6 Stunden, selbst noch den durch die Luft grau abgefärbten viereckicht auf 10 Zolle zugeplätteten Signalstamm, wenn er auch nicht von der Sonne erleuchtet ist.

Nehme ich die Stunde ordentlichen Gehens zu 16000 Baier. Fußen an, so ist der dioptrische Sehewinkel der Trommel

$$\frac{3.32.206264}{256000} = 77 \text{ Secunden; und}$$

für den Stamm 57 Secunden; mithin erstere fast 4 mal und letztere fast 3 mal größer als der kleinste verschwindende dioptrische Sehewinkel des Auges §. 3. IV. f. für Gegenstände, die sich noch deutlich präsentiren.

Etwas schlechter muß der Effect des Achromats, oder das Gesicht des Hrn. de Lambre, oder beide zugleich seyn, weil er von sich anführet, daß er mit demselben einen frey stehenden Baum bey einer Krone von 2 Metern, noch in 60000 Meter Abstand, noch gut erkennen kann: oder es müßte jener Achromat nur schwach vergrößern.

Kann nun der Geograph so kleine Gegenstände bis auf so große Weiten noch gut erkennen, so wird er emporragende Felsenkuppen, Thürme, große frey stehende Bäume, pyramidale Signale, noch um so weiter sehen, je breiter und höher sie sind, und je besser sie sich nach ihrer Farbe, Erleuchtung und Hintergrund präsentiren.

Würden nun entfernte Gegenstände nicht durch die Luft um so mehr verschleiert, je weiter sie entfernt sind, so würde sich eine stroherne Trommel von 6 Fußen, auch in 32 Stunden Abstand, eben so gut, wie die von 3 Fuß in 16 Stunden Abstand in dem Fernrohr präsentiren. Wirklich zeiget sich auch eine Pyramide von 10 Fußen in diesem Abstand in jenem Fernrohr noch sehr gut.

b. Es sey nun der Gegenstand A der eminenteste Theil eines Felsens einer Gebirgkette, welche das aufzunehmende Land durchziehet, oder auch ein Schloß auf einem hohen Berge, und B eine andere dergleichen, oder auch ein Kirchthurm, oder sonstiges hoch liegendes Object, durch welches und den A der Geograph eine Verticalebene rückwärts abzustecken Gelegenheit findet.

Auch sey C der erste Standpunct, in welchem er den A und B in seinem Achromat in gerader Linie so siehet.

Nun stehe der A von dem ersten Standpunct C, in welchem der Geograph den A und B in gerader Linie siehet, gerade 32. und von B 12 Stunden ab; er lässet in C einen Signalbaum mit einem Korb von 3 Fußen senkrecht setzen, und wählet sich nun einen Standpunct D. 12 Stunden von C, in welchem er zunächst den B und C in gerader Linie und den A beinahe verschwindend siehet, und allda einen gleichen Signalstamm errichten lässet.

Kann er nun 10 Stunden weiter von D an einer Stelle E, die Signalstämme D „C und den Thurm B in gerader Linie sehen, so errichtet er in E den dritten

Sig-

Signalstamm; er fähret so mit der Setzung der Signalstämme so weit fort, als sich die Verticale durch A und B verlängern lässet: und die sonach abgesteckte Diagonale entspricht ihrem Zweck um so besser, wenn sie bis über die Gränzen des Staates hinaus reichet.

Da sich mit der Zeit die Signalstämme durch ihr hygrometrisches Krümmen außer der Verticallinie verwerfen, oder auch durch die Stürme außer derselben gebogen werden können, so ist es dienlich, wenn der Geograph sie nur beiläufig auf 6 bis 7 Stunden weit hinter einander setzen läßt, wobey er nicht nur ihren Korb, sondern auch ihren Stamm in dem Achromat noch wohl sehen kann (a.).

Dabey verstehet es sich an und für sich, daß solche Signalstämme immer an den höchsten Stellen errichtet werden, die man in der Richtung der Signale vorfindet; damit man von jedem mehrere übersehen, und auch an jedem nachgehends die Horizontalwinkel über einen um so ausgebreitetern Horizont aufnehmen kann.

c. Bey dieser Operation ergiebt sich nun einmal die Stelle C der ersten Signalstange, so wie jeder andern durchs Probiren: es verändert der Geograph seinen Standort so lange, bis er sich endlich ganz überzeugt hält, daß er sich aufs genaueste in der geraden Linie durch A und B befinde; er bleibt also in der Stelle C immer nur bis auf einen Theil gewiß, um welchen er noch dieselbe verändern kann, ohne daß er aus der Linie durch A und B zu kommen wähnet.

Dieser kleine Theil oder Abweichung aus der Verticalebene durch A und B, für welche der Geograph nicht mehr stehen kann, hängt von dem Umstand ab, in wieferne das Bild des A das Bild des B, oder dieses jenes übersticht, oder statt dessen eines das andere gerade deckt, und von den Abständen dieser Gegenstände von der Stelle C selbst.

Präsen-

Präsentiren sich nemlich beide Gegenstände A „B dergestalt, daß der B den A genau decket, so kann das Auge dieser Deckung nur bis auf den dioptrischen Winkel sicher seyn, der ihm beinahe für den A verschwindend ist.

Bezeichnet (λ) diesen Winkel, und a „b die Abstände der Gegenstände A und B von der Stelle C; und (m) die Vergrößerung des Achromats, so ist einmal der Theil, für welchen das Auge nicht mehr stehen kann, ob das Object B das A gerade deckt, oder nur dieselben zur Rechten oder Linken hervor sticht, mithin ob A und B sich mitten inne decken, gleich a.tang $\frac{\lambda}{m}$.

Dieser Theil aber nimmt in B den Winkel (ε) ein; und es ist tang ε $=$ $\frac{a}{c}$ tang $\frac{\lambda}{m}$; wenn man a—b$=$c setzt; mithin auch b tang ε $=$ $\frac{a\,b}{c}$ tang $\frac{\lambda}{m}$ der Theil oder die Abweichung, für welche der Beobachter nicht stehen kann, ob er sich zur Rechten oder Linken, außer der Verticalebene durch A „B befinde.

Es sey z. E. der kleinste dioptrische Sehewinkel für den auf 32 Stunden entfernten Gegenstand, nach §. 3. IV. g., zu 64 Secunden befunden werden; und a $=$ 32 „c $=$ 20; b $=$ 12 Stunden; jede zu 16000 Fußen; so ist die Abweichung, für welche der Beobachter in diesem Falle nicht stehen kann, gleich $\frac{32.12.16000}{20}$. tang $\frac{64}{32}$

$=$ 307200. 0,0000097 $=$ 2,979 Fuße, oder beinahe 3 Fuße.

Je weiter daher die Gegenstände A und B deren Verticalebene man verlängern will, von einander entfernt sind, um so zuverlässiger läßt sich bey sonst übrigen gleichen Umständen, jene Verlängerung bewerkstelligen.

d. Ganz anders sind hingegen die Umstände beschaffen, wenn das Bild des Gegenstandes A über dem Bilde des B, oder dieses über jenes hinausreicht, oder excediret!

Denn

Denn in diesem Fall kommt nicht wie zuvor der kleinste Sehewinkel, sondern statt dessen das Augenmaaß des Beobachters in Anschlag; es kann derselbe die Lage der ersten Signalstange C in soweit sicher finden, als der Winkel einportirt, um welchen er den Excedens der einen Seite nach seinem Augenmaaß gegen den andern verschätzen kann.

Es zeige sich z. E. der Gegenstand A und B in C unter den dioptrischen Winkeln von 775 und 687 Secunden, in Abständen von 32 und 12 Stunden, wie in (c), so ist einmal der wirkliche Excedens auf der einen und der andern Seite 44 Secunden; und es kommt nun noch darauf an, den Theil zu bestimmen, um welchen sich der Beobachter nach seinem Augenmaaß verschätzen kann, wenn er wirklich sich überzeugt hält, daß der A über den B auf der einen, wie auf der andern Seite gleichviel excedirt. Da nun dieser Theil nach §. 3. IV. von der Größe der Bilder abhängt, so muß zuvörderst das Bild des A berechnet werden.

Es sey deswegen die Focallänge des Objectivs 16 Zolle oder $\frac{4}{3}$ Fuße; die Vergrößerung 32 mal, so ist einmal der wirkliche oder optische Winkel des Gegenstandes A im Objectiv $\frac{775}{32} = 24$ Secunden; und $\frac{4}{3}$. tang 24″ $= 0{,}000155$ die wirkliche Größe des Bildes. Da nun dieses in dem Achromat 32 mal größer gesehen wird, so ist seine scheinbare Größe 0,00496 Fuße, oder beinahe $\frac{1}{200}$ eines Fußes.

Eben so ist die Größe des Bildes B, gerade $\frac{687}{775}$ dessen, oder 0,00443. Fuße; mithin die Differenz zwischen beiden $0{,}005 - 0{,}00443 = 0{,}00053$. Fuße.

Nun kann ich aber solche feine Gegenstände nach meinem Augenmaaß nur bis auf $\frac{1}{12}$ ihrer wirklichen Größe schätzen, §. 4. V.; ich werde also auch hier bis auf $\frac{44}{12}$ Secun-

Secunden ungewiß seyn, ob der Excedens zur Rechten dem zur Linken genau gleich ist. Diese aber betragen $\frac{4}{12}\frac{4}{32}$, oder $\frac{1}{9}\frac{1}{6}$ Secunden im optischen Winkel selbst; oder an dem Gegenstand A einen Theil von

$$32.16000.\text{tang}\,\tfrac{1}{9}\tfrac{1}{6} = k \text{ Fußen.}$$

Diese werden in B in einem Abstand von 20 Stunden unter einem Winkel gesehen, dessen Tangente

$$\frac{k.}{20.16000} \text{ ist.}$$

Stehet daher der B von C um 12 Stunden ab, so ist die Abweichung von der Verticalebene durch A und B in C gleich $\frac{k.12.16000}{20.16000} = \frac{3}{5}.32.16000.\text{tang}\,\frac{1}{9}\frac{1}{6}$

$= \frac{3}{5}.512000.\ 0{,}00000055 = 0{,}00168.$ Fuße; das ist: man könnte unter diesen Umständen den Punct C oder die Stelle der ersten Signalstange fast ganz sicher bestimmen.

Eben so verhält sichs auch mit dem Setzen der übrigen Signalstangen; welche der Beobachter um so sicherer in die gegebene Verticalebene durch A und B setzt, je deutlicher er sie nach ihren kurzen Abständen von 6 bis 8 Stunden siehet. Nur muß der Geograph darauf antragen, daß immer die vordere die folgende in ihrem Durchschnitt etwas übertrift, damit ihr Bild über das Bild der letztern excediret.

Nach diesen Betrachtungen kommt daher bey Absteckung einer Verticalebene, oder Diagonale durch den aufzunehmenden Staat alles darauf an, in demselben, oder zunächst an seiner Gränze, oder auch außer derselben ein Object A auszuwählen, das nach seiner hohen Lage prädominirt, und für dieses in jener Richtung, nach welcher sich am füglichsten wegen des Terrains die Diagonale traciren läßt, ein anderes Ob-

ject

ject B auszusuchen, das von dem A so weit als möglich entfernet ist: man kann, wo sich kein schickliches vorfindet, eine Blende von Holz in der Form eines Schanzkorbes allda errichten, wo diese auf einem Berge die weiteste Aussicht in der Richtung der Diagonale gewähret. Dabey eignet sich aber immer die Weite, in welcher die erste Signalstange C gesetzt werden kann, nach der Güte des Achromats, dessen sich der Geograph hiezu bedienet, und nach seinem Gesicht: er kann diese Stange nicht weiter von dem Objecte A entfernen, als daß er dieses noch mit mittlerer Deutlichkeit in seinem Achromat siehet: er muß eben so die übrigen Stangen nicht weiter von einander stellen, als daß er wenigstens die Trommeln der zwey andern noch gut sehen kann.

Je besser also sein Achromat, sein Gesicht und Augenmaaß ist, um so einfacher und sicherer wird die Operation der Absteckung selbst.

e. Soll zwischen zweien Gegenständen A und B, die nur etliche Stunden von einander entfernet sind, eine Verticalebene abgesteckt werden, so kann dieses nur vermittelst schwacher Stangen, z. E. der Fluchtstangen geschehen, deren sich der Geodät in solchen Fällen bedienet.

Es stecket nemlich der Geograph zwischen A und B vorerst eine Stange C, visieret über dieselbe nach dem nächsten Object A, und lässet in die Visierlinie eine andere Stange (α) genau einstecken.

Er visieret nun von α über C nach B mit seinem Achromat, und bemerket, ob diese Visierlinie genau die Mitte von B trift.

Ist dieß nicht der Fall, so ändert er die Stelle der Stangen (α) und B so lange, bis die Visierlinie über diese Stangen vor- und rückwärts die Mitte von A und B trift.

Die-

Diese Absteckung einer Verticalfläche vollführet der Geograph für seine Grundlinie, die er nachgehends aufs genaueste mißt; und bemerket in der Mitte der Objecte A und B farbichte Streifen, um die Stangen nach diesen sicherer zu setzen, als geschehen könnte, wenn er immer die Mitte derselben, nach seinem Augenmaaß, treffen sollte.

Bringt der Geograph seinen Geodolithen zwischen A und B an eine Stelle C, richtet ihn nach A, während der Index der Alhidade auf o stehet, so ist C und A in einerley Ebene.

Drehet er nun die Alhidade um 180 Grade herum, und der Gegenstand B fällt nun wie zuvor der A mitten in das Fadenkreuz des Fernrohrs, so ist C mit A und B in einerley Verticalebene: man kann daher auch durch den Geodoliten eine Verticalebene zwischen A „B abstecken, wenn man durchs Probiren die Stelle C suchet, wo diese Eigenschaft zutrift.

Das Ziehen einer geraden Linie, durch zwey auf der Charte gegebene Puncte.

II. Sind die Puncte (α) und (β), die auf die Charte projicirte Puncte §. 1. III. a. der Gegenstände A und B in (I.); so verlängert der Geograph die zwischen ihnen liegende gerade folgendermaßen. Tab. III. Fig. 32*.

Er setzet wechselsweise eine in eine feine Spitze sich verlaufende Punctiernadel in diese Puncte, und schiebet nun die gerade Face eines Lineals an dieselbe so an, daß er sich durch sein Gefühl überzeugt, daß die Face immer an der senkrecht stehenden Nadel anschläget, und ziehet nun durch diese Puncte die gerade $\alpha\beta$, bis zu ihrem Endpuncte (γ) aus, oder glättet sie in das Papier ein.

Statt

Statt der Nadel kann man sich auch nach Umständen eines in eine runde scharfe Spitze sich verlaufenden Bleystiftes bedienen; und mit diesem die Linie um so feiner und augenfälliger ziehen, je härter, spitziger und schwärzer der Stift ist: auch ist es nothwendig, daß man den Stift in der Hand nicht drehet, sondern immer an der nemlichen Stelle des Lineals anrücket.

a. Je feiner nun die Puncte (α) und (β) in dem Papier gestochen sind, um so weniger kann die Nadel in ihnen durchs Anrücken des Lineals variiren, und um so sicherer kann deswegen die Linie durch beide Puncte gezogen und verlängert werden; es wird statt dessen die Lage des Endpuncts (γ) um so veränderlicher seyn, wenn der Geograph das einemal in dem Punct (α) das Lineal schwächer als in dem Punct (β) an die Nadel anrücket.

Es drücke z. E. der Geograph das Lineal in dem Puncte (α) um $\alpha a = d\alpha$ seichter, und in (β) um $b\beta = d\beta$ stärker an, während beide Puncte $\alpha_{,,}\beta$ um $\alpha\beta = \delta$ Fuße von einander entfernt sind: so ziehet er unter solchen Umständen eigentlich die Linie αc statt der $\alpha\gamma$; und ihr Endpunct weichet um γc von der geraden $a\gamma$ ab, die durch die wirkliche Mitten derselben gehet, und die Linie $\alpha\gamma$ macht mit der αc den Abweichungswinkel $cf\gamma = \varepsilon$; und γ liegt von β um (h) Fuße ab.

Setzt man hier $bf = x$; so ist einmal

$$\frac{a\alpha}{\alpha f} = \frac{b\beta}{f\beta}; \text{ oder } \frac{d\alpha}{\delta - x} = \frac{d\beta}{x}; \; x = \frac{d\beta}{d\alpha + d\beta}.\delta;$$

$$\text{tang}\,\varepsilon = \frac{b\beta}{f\beta} = \frac{d\alpha + d\beta}{\delta}; \text{ und } c\gamma = (f\beta + \beta\gamma)\,\text{tang}\,\varepsilon; \text{ oder}$$

$$c\gamma = \left(\frac{x+h}{\delta}\right).(d\alpha + d\beta).$$

Es sey z. E. einer der Puncte (α) und (β) in den andern $\frac{1}{3000}$ Fuß; und $d\alpha = d\beta = \frac{1}{5}$ dieser Puncte; und

und $\alpha\beta = \frac{1}{4}$ Fuß; $\beta\gamma = 2$ Fuße; so ist hier einmal $x = \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{8}$ Fuß; und $c\gamma = \frac{17}{8} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{2}{15000} = 0{,}00113$ Fuße.

Je näher daher die Puncte α„β beisammen sind, um so unzuverlässiger läßt sich durch sie ihre gerade Linie verlängern; die Verlängerung wird noch um so unsicherer, je weiter die Löcher der Puncte α und β noch außerdem sind, oder je mehr deswegen die Punctiernadel nach dem Gefühl des Geographen in ihnen variiren kann.

b. Sind α„β keine bereits gestochene Pünctgen, sondern statt dessen die Enden einer bereits auf dem Papier mit der Punctiernadel gezogenen Linie $\alpha\beta$, welche bis nach (γ) mit dem Lineal verlängert werden soll; so leget der Geograph dasselbe über der Linie, so genau an, daß ihm die scharfe Face des Lineals mit der Linie durchaus parallel zu seyn scheinet, in einem Abstande, in welchem er nach der Stärke der Nadel die Face von ihr bringen muß, um die Linie in gehöriger Continuität verlängern zu können.

Dabey ist nun aber derselbe immer an den Enden der Linie um einen Theil jenes Parallelismi ungewiß, für welchen er nach der Schärfe seines Gesichts nicht mehr stehen kann; unter den äußern Umständen, in welchen er die Linie selbst mehr oder minder deutlich siehet.

Für mein Auge ist nach §. 3. I. a. der kleinste Sehewinkel für solche glänzende Linien 20 Secunden, wenn ich sie in $\frac{1}{2}$ Fuß Abstand am deutlichsten sehe; mithin der kleinste Sehepunct für dieselbe $\frac{1}{10000}$ eines Fußes $= d\alpha$; ich kann daher um diesen Theil an beiden Enden der Linien in Anlegung des Lineals variiren; und es ist sonach, nach (α), die Abweichung

$$c\gamma = \frac{17}{8} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{2}{20000} = 0{,}000085 \text{ Fuße};$$

das

das ist: ich werde in beiden Fällen die Linie α β auf dem Papier ohne allen Fehler auf 2 Fuße verlängern können.

§. 10.

Die Grundlinie des Geographen.

Die Auswahl und Eigenschaften der Grundlinie.

I. Nimmt der Geograph einen Staat nach der Triangularmethode §. 4. II. auf, so muß ihm für sein Dreyecknetz, das er über den ganzen Staat verbreitet, wenigstens eine Seite eines solchen Dreyecks als wirklich gemessen bekannt seyn, die man die Basis oder Grundlinie des Netzes, und das an diese sich anschließende Dreyeck, das Wurzeldreyeck heißt; weil das ganze Netz sich auf dieses fundiret.

a. Diese Grundlinie muß ferner nach ihrer Länge, ein gewisses Verhältniß zu den Seiten der Hauptdreyecke haben, welche der Geograph nach §. 4. III. etabliren kann; sie würde nach ihrer Länge für seinen Zweck die geeignetste seyn, wenn sie die Seite eines solchen Dreyecks selbst abgeben könnte.

Da aber dieses wegen des Terrains immer um so seltener ist, je länger die Seiten jener Dreyecke sind, so muß sich der Geograph meistens begnügen, wenn ihm seine Grundlinie nur die Seite eines secondären Dreyecks abgiebt; durch welche er nachgehends auf dem nächsten Wege die Seite des nächsten Primärdreyecks berechnet. Er nimmt deswegen immer seine Grundlinie so groß an, als ihm das Terrain gestattet, und sucht die nächste Verbindung ihres secondairen Dreyecks mit jenem,

nem, durch bereits vorhandene Zwischenpuncte, z. E. Thürme, oder auch durch Signale, die so placirt werden, daß er die Seite des Primairen mit möglichster Zuverlässigkeit bestimmen kann. §. 8.

b. Indem nun die Grundlinie auf ihrem Terrain immer mit Meßwerkzeugen gemessen werden muß, in soferne sie nicht astronomisch bestimmt wird, muß dieses wegen Genauigkeit der Messung immer möglichst eben seyn, und auf ihrer Ebene in stetiger Continuität fortgemessen werden können; es mißt sie der Geograph nur da und dort durch Traversen, §. 7. I., wo ihm das Terrain nicht gestattet, die Messung in der zwischen ihren Endpunkten abgesteckten Verticalebene §. 8. I. geradlinicht fortzusetzen: er errichtet auch an ihren Enden pyramidale Signale, §. 4. IV., unter welchen, oder auf welchen er die Winkel ihres Wurzeldreyecks concentrisch aufnehmen kann; weil die excentrische Aufnahme derselben auf Thürmen, immer das Centriren der gemessenen Winkel nothwendig macht; die immer auf einer Annäherung beruhet, und deswegen um so gefährlicher ist, je größer die Folgen der unvermeidlichen Fehler für die zu bestimmende Seite des nächsten Primärdreyecks sind. §. 6. VII.

c. Weil ferner die Folgen der bey Dreyeckmessungen unvermeidlichen Fehler, sich mit ihrer Anreihung eben so anhäufen, als sich wechselseitig ganz oder auch nur zum Theil unter sich aufheben können, so muß der Geograph deswegen darauf antragen, die Grundlinie so nahe als es möglich ist, in der Mitte des aufzunehmenden Staates auszuwählen: damit die Anreihung der Hauptdreyecke von derselben aus, nach allen Seiten um so mehr abnimmt, je größer an und für sich diese Dreyecke etablirt werden können, und je weniger nach der Größe des Staates, sein Triangularnetz constituiren.

d. Ist

d. Ist das Terrain der Grundlinie parallel mit seinem trockenen Sürfas, §. 1. I. c., so ist sie immer als ein Bogen, oder als ein Theil der Curve anzusehen, die sich in ihrem Abstand von jenem Sürfas, um die Erde herum denken läßt; sie reducirt sich auf einem abfälligen Terrain auf diesem Bogen, durch ihre sogenannte Staffelmessung; und es erhält dieser Bogen sein kleinstes Maaß, wenn das Terrain der Grundlinie dem Sürfas der Oceane zunächst liegt, oder auch, wenn ihr gemessener Bogen auf diesen Sürfas reducirt wird.

Fundiret sich nun das Dreyecknetz des Staates auf seine Grundlinie, so liegt auch dieses ganz in der Ebene, in welcher die durch seine Grundlinie um die Erde herum gedachte Curve liegt; es reducirt sich dieses Netz auf den trockenen Sürfas seines Staates selbst, wenn es auf seine auf den Sürfas reducirte Grundlinie fundirt wird; und gehet so in die geographische Horizontal-Projection des Staates über. §. 1. III.

Wenn daher das Terrain der Grundlinie 2000 Fuße über dem Sürfas der Oceane liegt, so ist die Dreyeckreihe des Staates anzusehen, als liege sie ganz in einer Ebene, die um eben so viel von jenem Sürfas ablieget; es reducirt sich das Dreyecknetz auf den Sürfas selbst, wenn das Maaß seiner Grundlinie auf diesen reducirt, und das Netz nach ihrem reducirten Maaß berechnet wird.

e. In dieser Ebene ist nun die reducirte Grundlinie immer ein Stück eines elliptischen Bogens, welchem in der Erde ein gewisser parallactischer Winkel zugehört, der als solcher nach Theilen des Grades ausgedrückt wird: es mißt dieser Winkel die Seite des sphärischen Dreyecks, welchem die Grundlinie angehöret (a.), und muß deswegen von dem Geographen für eine gewisse

Abplat-

Abplattung unserer Erde §. 1. berechnet, oder statt dessen astronomisch bestimmt werden.

Wo selbst die Primärdreyecke des Triangelnetzes nur klein sind, cessiret an und für sich die sphärische Aufnahme, und der Geograph führet bey der Berechnung der Dreyeckreihe, das Längenmaaß der gemessenen Grundlinie so auf, wie sich dieselbe, nach vorgenommener Verification ergeben könnte.

f. Wo das Triängularnetz eines Staates, nach dessen Größe, sehr ausgedehnt ist, mithin eine starke Anreihung von Dreyecken erfordert, ist es immer räthlich, an den Gränzen des Staates, mehrere einander gegenüber liegende Grundlinien zu messen, in soweit das Terrain dieses zulässet.

Denn einmal kann man die Messung nach der Seite einer solchen Grundlinie hin, controliren, indem man diese Linie durch die nach ihr führende Dreyeckreihe bestimmt, und ihre berechnete Länge mit ihrer gemessenen auf den Sürfas reducirten Länge vergleicht; es heißt in diesem Fall diese Linie die Verifications-Linie der Reihe; oder man kann auch von einer solchen Linie aus, wo besonders ihre Größe mit dem nächsten Primär-Dreyeck in geeignetem Verhältniß ist, nach der Haupt-Grundlinie hin, die Dreyecke rechnen, und so die Seite eines in der Mitte zwischen beiden Linien liegenden Dreyecks nach der einen und nach der andern berechnen, um zu sehen, welche Differenz sich ergiebt; ja man kann diese Differenz gehörig ausschlagen, und so die Dreyeckreihe von dieser Seite verificiren.

Messung einer Grundlinie.

II. Ist nun die Grundlinie nach §. 8. I. auf das sorgfältigste abgesteckt, so schreitet der Geograph für ihre Messung selbst vor; und wählet hiezu jene Meßwerkzeuge und

und Vorrichtungen, die der Genauigkeit entsprechen, mit welcher der Staat, oder das Reich aufgenommen werden soll.

Erheischet nun diese nach der Größe des Staates, und nach dem Zweck, welcher seiner Aufnahme zum Grunde lieget, die möglichste Genauigkeit, so bedienet sich der Geograph für die Messung seiner Grundlinie, der sogenannten Meßruthen; er wählet, wo jene Genauigkeit nicht gerade erforderlich ist, die hölzernen Meßstangen; oder er bedienet sich in den einfachsten Fällen auch nur der Meßkette des Geodäten.

Bey der Messung selbst bleibt es ferner immer erster Grundsatz, die Linie innerhalb ihrer abgesteckten, und durch eine Schnur tracirten Verticalebene so zu messen, daß kleine Stücke derselben immer horizontal gemessen werden: man misset nur da und dort in derselben Berg an und Berg abwärts, wo die sogenannte Staffelmessung zu aufhaltend und zu unsicher seyn würde.

Man reducirt die gemessene Längen nachgehends auf ihre horizontale Längen, durch die Elevationswinkel; man reducirt außerdem die bey verschiedener Temperatur gelegte Ruthen, auf eine gewisse Normaltemperatur, und findet so die Länge der ganzen Grundlinie für diese Temperatur.

Was nun zuvörderst die Meßruthen anbelangt, so bestehen dieselbe immer aus Stäben von gewisser Länge; die ihrer Substanz nach am beßten von Metall, und insbesondere von geschmiedetem Eisen sind; weil Stangen von Platina, Kupfer, Messing, Glas und Porcellain immer höher als diese im Preise zu stehen kommen, und hölzerne Stangen wegen ihres Werfens nach der Witterung, die Genauigkeit nicht gewähren, die man von jenen erwartet.

Solche eiserne Stangen haben nun in ein Quadrat-Zoll Stärke eine Länge von 12 bis 18 Fußen; sie sind an ihren beiden Enden rechtwinklicht abgeplättet, oder verlaufen sich auch in Conoiden, deren Tangentalebene entweder flach, oder von einer Seite Carnis- oder Stabartig abgemugelt sind; und 8 bis 10 solcher Stangen machen gewöhnlich eine Lage oder Piece bey ihrem Gebrauch.

Jede dieser Stangen ist ferner von einer hölzernen Kapsel oder Gehäus umgeben, und durch gefütterte Sättel dermassen in das Gehäus eingepaßt, daß sie unbeweglich in ihrer geraden Richtung zwischen den Sätteln lieget, und an ihren beiden Enden bey 1 bis 2 Zolle über das hölzerne Gehäus frey hervorsticht; es liegen dabey die Stangen in ihren Gehäusen so, daß, wenn der Carnis der einen in die Lothlinie trift, der der andern horizontal ist, damit die Carnise sich rechtwinklicht schneiden.

Damit sich auch die Gehäuse während des Gebrauchs auf den Böcken oder Schragen nicht durch ihr eigenes Gewicht senken, oder biegen, ist an der untern Seite des Gehäuses ein starkes Brett auf der hohen Kante stehend als Strebe feste gemacht; auch ist parallel mit der in dem Gehäuse liegenden Stange, eine Wasserwaage angebracht, nach welcher man das Gehäus mit seiner Stange durch eine Schraube horizontal richtet.

Es hat deswegen der Deckel des Gehäuses eine mit einer ledernen Klappe verschlossene Oeffnung, durch welche man den Stand der Blase in der Waage unter der Beschattung des Deckels beobachten kann.

Eben so ist auch in der Mitte jeder Stange selbst ein Thermometer eingelassen, welcher die Temperatur der Stange mißt; man siehet das Thermometer, so wie die Wasserwaage durch eine in dem Deckel des Gehäuses einge-

eingeschnittene Oeffnung, die mit einer Leder-Klappe auf gleiche Art bedeckt wird; um den Thermometer der directen Erleuchtung der Sonne nicht zu exponiren.

Uebrigens ist es für die Conservation der Stangen sehr dienlich, wenn dieselbe an ihren carnisartig abgemugelten Enden mit Stahl belegt, und allda gehärtet sind, weil sich sonst in dem weichen Eisen auf der Tangentalebene der Stangen, in welchen diese an einander angedrückt werden, leicht kleine Tellen zeigen könnten. Sie werden außerdem durch eingefeilte Zeichen numerirt.

b. Außerdem bedarf der Geograph für die Messung einer Linie noch anderer Werkzeuge und Vorrichtungen. Diese sind nun außer einem messingenen Planchet, auf welchem die Einheit der Meßruthen in 1000 gleiche Theile abgetheilt ist, hölzerne Schragen, Senkel, Setzklötze, Fluchtstangen, Keile, Zangen, Hammer, Schnüre und sonstige Geräthschaften.

Von diesen sind die Schragen oder Böcke mit 4 Füßen von Holz versehen, in deren jedem eine Radwinde steckt, deren gezähnte Stange, durch Zahn und Trieb herausgewunden werden kann, um dem Schragen selbst eine beliebige Höhe zu geben.

Diese Vorrichtung ist viel sicherer zum Gebrauch als die sogenannten Schämel, welche auf 3 Füßen stehen, und aus deren Mitte eine Scheibe aufwärts geschoben werden kann, auf welche die Meßruthen zu liegen kommen; weil diese, da sie in der Schraube immer einen starken Spielraum haben müssen, leicht wackeln, oder nicht gehörig stabil sind.

Diese Schragen werden nun bey der Messung selbst in die abgesteckte Verticalebene dergestalt gestellet, daß ihre mit einer Kerbe oder Einschnitt bezeichnete Mitte, genau auf die Schnur trift, welche der Geograph an

den Fluchtstangen vorbeyziehet, die er während des Messens, zwischen die Signalstangen einstecken lässet, um desto sicherer in der Verticalebene mit den Meßruthen zu verbleiben.

Man leget dabey auf die äußersten Schragen die Meßruthen dergestalt auf, daß sie über dieselbe hervorragen, während von den übrigen zwischen diesen befindlichen, die Piece constituirenden Ruthen, immer je zwey und zwey auf dem Rücken oder Sattel eines Schragens aufgelegt, und allda an den Enden ihrer Stangen in Berührung gebracht werden.

Dabey richtet man jede Meßruthe nach der in ihrer Kapsel befindlichen Wasserwaage durch die Winden der Füße des Schragens vorerst beiläufig horizontal, wo man dieses auf weichem Boden nicht durch das Eindrükken der Fuße in den Boden selbst, verrichten kann, und schiebet sie sämmtlich in soweit unter die Schnur, bis diese die auf den Deckel jeder Kapsel eingerissene Centrallinie decket.

Außerdem beobachtet der Geograph auch jedesmal den Stand des in jeder Kapsel befindlichen Thermometers; und siehet genau nach, ob die Enden der Stangen sich wirklich berühren; er lässet dabey seine Gehülfen sich ruhig verhalten, damit die Meßruthen durch das Zittern des Bodens nicht in Schwingung gerathen; das besonders auf einem Boden nothwendig ist, der als torfartiger sich an und für sich stark schwinget; es ist dieß Schwingen, der Erfahrung zufolge, schon auf einem Boden spürbar, der nur mit einem torfartigen Schwilch überzogen, oder bedeckt ist.

Bey der Messung der fränkischen Grundlinie wollte Hr. Prof. Schieg die auf diese Art gefertigten Meßruthen nicht unmittelbar selbst an einander stoßen, weil er ein Verschieben derselben befürchtete.

Er

Er schob deswegen zwischen jedes Paar der sich beinahe berührenden Stangen einen stählernen Keil ein, dessen beide Seitenflächen Theilstriche hatten, durch welche sich die Ordinate für den Abstand der Enden der Stäbe ergab. Auch legte derselbe die Meßruthen nur beiläufig auf den Schragen horizontal, und maß am Ende durch die Schraubenmicrometer den Neigungswinkel nach dem Einspielen der Luftblase am Niveau der Ruthe.

Befinden sich nun sämmtlich angestossene Meßruthen in gehöriger Lage, so notiret der Geograph den Continens derselben, oder die Piece oder Lage in sein Meß-Journal, und setzet für jede Nummer derselben die Grade des Thermometers bey, welche derselbe um diese Zeit in der Kapsel der Meßruthe zeigte. Er schraubet ferner nachgehends jede Ruthe durch ihr Schraubenmicrometer genau horizontal, und notiret ihren Elevations- oder Depressionswinkel mit allem und jedem Accidentalen, oder was sonst auf die Lage Influirendes vorgefallen ist.

Nach diesem wird die Lage nach und nach bis auf ihre erste Ruthe von hinten her abgebrochen, die Schragen vorwärts gestellt, und die nächste Ruthe an die erste noch fest liegende Ruthe der vorigen Lage sanft angeschoben, und so, wie vorhin, die neue oder folgende Lage eingerichtet, und notiret.

Dieses gehet nun von Lage zu Lage seines Ganges so lange fort, bis entweder das Terrain einen Abfall bekommt, für welchen die Schragen nicht mehr ausreichen; oder bis nach Umständen die Messung selbst mit einer gegebenen Lage sistiren muß.

c. In solchen Fällen bedienet sich der Geograph des Senkels, um durch denselben den Punct auf dem Boden zu projiciren; in welchen eine die Tangentalebene, oder das Ende der äußersten oder ersten Meßruthe der Lage berührende Lothlinie den Boden trift.

Die-

Dieser Senkel ist, da er der unstäten Luft öfters ausgesetzt ist, immer so schwer, daß ihn der angebundene feine Faden gerade noch zu tragen vermag; und verlieret sich in seiner Form in eine feine stählerne Spitze.

Dieser Senkel spielet mit seiner Spitze gewöhnlich auf der Bley- oder Messingplatte eines Klotzes an, der nach Umständen auf weichem Boden in denselben getrieben wird, wo der Wind den Senkel selbst nicht alterirt. Es läßt in solchen einfachen Fällen der Geograph den Faden des Senkels an der Tangentalfläche der ersten Stange anhalten, während er selbst auf dem Boden liegend, auf dem in den Boden allda eingetriebenen Klötzchen attendiret, wo der Senkel auf der auf dem Rücken desselben festen Bley- oder Messingplatte anspielet: und bezeichnet auf derselben diese Stelle durch einen Punct, welchen er in die Bleyplatte allda mit einem scharfen Bonzen eindrücket. Dieser Punct ist also die Projection der Lothlinie, welche die Tangentalebene der ersten Meßruthe streifet.

Durch diesen projicirten Punct überzeuget man sich, ob während der Zeit als die Messung sistirte, z. E. über Nacht, die Piece oder Lage der Stangen sich nicht geändert hat, indem man vorerst den Senkel wieder an diesen Punct anspielen lässet.

Wo ferner das Terrain stark auf einmal abfället, bedienet man sich auch dieses Puncts, um von demselben aus die Messung weiter fortzusetzen.

Man bricht nemlich die letztere Lage ab, und rücket die vorerst gelegte Meßruthe auf ihren Schragen so weit an, bis der ihre Tangentalfläche berührende Senkel, genau auf dem projicirten Punct einspielet.

Eben so verfährt man auch bey dem Anfangspunct der Grundlinie selbst. Man pflegt gewöhnlich, um diesen Punct, so wie sämmtliche Winkel und den Endpunct der

Grund-

Grundlinie auf immer zu erhalten, an deren Stelle große Steine oder Quadern in den Boden einzugraben, auf deren ebner applanirter offener Seite diese Puncte projicirt und durch conische Vertiefungen auf immer bemerkbar gemacht werden.

Wo der Wind den Senkel zu sehr alteriren würde, als daß man den jedesmaligen Sistier-Punct auf dem Boden, mit erforderlicher Sicherheit vormerken könnte, bedienet man sich auch eines starken Klotzes, der beinahe die Höhe der Schragen hat, und auf seiner obern Seite mit einer dicken Bleyplatte versehen ist.

Dieser Klotz wird an seiner Grundfläche durch Keile so lange balancirt, bis seine Bleyplatte beiläufig horizontal liegt; es senkelt auf ihr der Geograph von der Tangentalfläche der äußersten Stange herunter, und projiciret auf seiner Bleyplatte den Sistierpunct um so sicherer, je fester der Klotz nach seinem Gewichte seines Orts stehet, und je näher er bis zur Meßruthe selbst hinaufreichet, und dadurch den Moment des Windes vermindert.

Ist nun der Geograph nach diesen Maximen vom Anfangspunct bis zum Endpunct der Grundlinie, oder auch nur bis zu einem Winkelpunct derselben, mit der Messung avanciret, so zählet er vorläufig nach seinem Meßjournal die gemachten Piecen oder Lagen zusammen; und er hält so in der Summe die scheinbare Länge der ganzen Grundlinie selbst, oder auch nur eines Theils derselben, bis zu einem ihrer Winkelpuncte.

Es ist ferner jede vollführte Piece oder Lage, eine Tangente der Erde, für ihre Stelle; mithin die scheinbare Länge der Grundlinie die Summe der in sie fallenden Tangenten. Da aber jede derselben im Mittelpunct der Erde einen äußerst kleinen Winkel macht, so kann man den Bogen desselben für die Tangente selbst nehmen; und es ist sonach die gemessene Grundlinie, so wie jedes

Stück

Stück derselben ein Theil eines größten Kreises der Erde, für den ihres Orts entsprechenden Halbmessers derselben.

Uebrigens werden die in den Boden eingeschlagenen Klötzchen, auf welchen die Sistierpuncte eingedrückt sind, in dem Boden ihres Orts belassen, wenn man Willens ist, die Grundlinie auch rückwärts zu messen.

Sie controliren in diesem Falle die Messung, indeme man nachgehends einzelne Stücke der Grundlinie unter einander vergleichen kann, nachdem die nöthigen Correctionen bereits vorgenommen worden sind; man kann außerdem, wo die Differenzen sich immer gleich bleiben, etwa vorgefallene Fehler auffinden; und im Ganzen genommen, die Zuverlässigkeit der Messung nach jenen Pflöcken aufsuchen und bestimmen.

Sehr gut ist es auch, wenn man während der Messung auf bestimmte Lagen, in den Boden Pfähle einschlagen lässet, auf welchen die bis dahin vollführte Lagen aufgezeichnet werden; weil man nach solchen Pflöcken durch das Nachmessen mit der Kette Fehler leicht entdecken kann, welche etwa durchs Verzählen sich in die Basis einschleichen möchten.

Wo die Messung über Canäle, Gräben oder Sümpfe gehet, bedienet man sich solcher Schragen, deren Füße über dem Wasser so weit, als die übrigen über den Boden stehen; oder man setzt indessen an diese Latten von gehöriger Länge an, und macht sich für das Personale Stege, um die Messung unausgesetzt fortsetzen zu können; man legt nur da eine Traverse an, oder bricht mit der Linie zur Seite aus, wo das Hinderniß zu bedeutend ist, um die Messung geradlinicht fortsetzen zu können.

Uebrigens muß der Geograph auch während der Messung, an beiden Enden der Grundlinie barometrische

Beobachtungen anstellen lassen, um durch dieselbe ihre Eminenz über den Sürfas der Oceane zu bestimmen.

Sollte man bis an das Ende der Basis nicht unmittelbar selbst messen, oder auch an ihren Anfangspunct die Messung nicht selbst anfangen können, so siehet man das excedirende Stück als die Seite eines Dreyecks an, und bestimmt dieselbe nach trigonometrischen Principien, so genau, als nur immer möglich ist.

Verification der Grundlinie.

III. Zählet man die für einen Theil der Grundlinie bey den Operationen (II.) erhaltene Piecen oder Lagen zusammen, und addiret den dabey excedirenden Theil nach Umständen, so erhält man die gemessene Länge dieses Theils der Grundlinie; oder, wo diese ganz gerade ist, der Grundlinie selbst.

a. Da aber nach der Dauer dieser Operationen, sämmtliche Lagen der Meßruthen nicht unter einerley Temperatur vorgenommen werden können, und deswegen nach der pyrometrischen Ausdehnung der Stange, §. 8. IV. c., eine Lage derselben vor der andern kürzer oder länger seyn kann, auch nicht sämmtliche in einerley Horizontallinie liegen, so müssen die Längen sämmtlicher vorerst auf eine gewisse bestimmte Temperatur reducirt, das ist, die gemessene Basis durch ihre pyrometrische Ausdehnung zuvörderst corrigirt werden.

Für diese Temperatur nimmt man am schicklichsten die des Eispunctes an, um die Basis mit andern vergleichen zu können, die in andern Staaten gemessen, und auf diese Temperatur gebracht wurden, wobey die Reduction selbst folgendermaßen geschiehet.

Man habe z. E. eine Lage gemessen, bey einer Temperatur von 10 Graden; die Piece bestehe dabey aus

6 Stan-

6 Stangen zu 16 Fußen: und man wisse, daß die Nummer I. IV. auf diese 10 Grade nach ihrer pyrometrischen Curve nur $\frac{1}{7200}$; die Nummern II. III. V. VI. aber nur $\frac{1}{8000}$ ihrer Länge, welche sie bey jener Temperatur haben, länger seyen.

Für diesen Fall ist also Num. I. und IV. jede um $\frac{16}{7500}$ Fuße länger, als bey der Normaltemperatur; und es ist mithin die wahre Länge der Piece bey dieser Temperatur gleich $+2.16\left(1-\frac{1}{7200}\right)+4.16.\left(1-\frac{1}{8000}\right)$ $= 31,99555... + 63,992 = 95,9875555.$ Fuße.

b. Ist nun die Länge jeder Meßruthe auf jene Temperatur, oder auch auf eine andere gebracht, so berechnet der Geograph auch die horizontale Länge jeder schief gelegenen Stange.

Es bezeichne der Buchstabe (l) die Länge der Stange für die Normaltemperatur, und (ε) den Neigungswinkel derselben; so ist l.Cos ε das horizontale Maaß der Stange, und l.(1—Cos ε) der Unterschied, um welchen dieses kürzer als die Ruthe ist. Da hier die Rechnung nach aller Schärfe geführt werden muß, so sind die Logarithmen nicht anwendbar, die man sonst nach der Formel $2l.\mathrm{Sin}^2.\frac{1}{2}\varepsilon$ führen könnte.

c. Wird das nemliche Stück der Grundlinie rückwärts gemessen, und auf gleiche Art behandelt, so kann es sich fügen, daß das Resultat der andern Messung von dem der ersten etwas abweichet, oder daß sich eine kleine Differenz zwischen beiden Resultaten für die nemliche Distanz vorfindet.

Hat sich nun der Geograph nach den in dem Boden verbliebenen Sistierpuncten (II.) mit Zuziehung der Aenderung durch die Temperatur, überzeugt, daß in der ersten

Mes-

Messung ein kleines Versehen oder unmerkliche Verrükkung der Stangen in ein und anderer Lage vorgefallen seyn müsse, so bringt er diese in Rechnung, und corrigiret so seine erste Messung; er vergleichet nachgehends die corrigirte erste Messung mit der andern, und findet so die Differenz zwischen beiden; er nimmt, wo er nach Umständen keinen Grund hat, der einen Messung vor der andern einen Vorzug zu geben, das arithmetische Mittel zwischen beiden für die verificirte Länge dieses Stücks der Grundlinie an.

Hätte die erste Messung die corrigirte Länge eines Stücks der Grundlinie zu 28453 Fußen, die andere aber zu 28453,024 ergeben; so nimmt er 28453,012 für die verificirte Länge dieses Stücks der Grundlinie an.

Dividiret man durch diese die Differenz von 0,024 Fußen, so ergiebt der Quotient die Zuverlässigkeit der Messung selbst. §. 8. I. Dieser ist hier 0,0000008; und zeiget deswegen an, daß der Geograph unter gleichen Umständen eine Linie von 10000000 Fußen, bis auf 8 Fuße sicher messen könnte; das, ist: er würde auf 1250000 Fuße, erst einen Fuß fehlen können.

Bey der fränkischen Grundlinie des Hrn. Schieg, war jede Stange zu 4 Meter angelegt, und die Piece bestund aus 5 solchen Stangen. Die Basis selbst erstrecket sich von St. Johannis bey Nürnberg bis Bruck bey Erlangen, auf 7078,98 Toisen bey 13 Grad Reaumur, oder 47273,44 Baier. Fuße.

Ihre Messung dauerte vom 26 Septemb. bis 29sten October 1807.; und der sämmtliche Kostenbetrag machte 1836 Gulden, mit Einschluß der Auslagen für die Meßruthen, und übrige Werkzeuge und Geräthschaften, und den Diäten des Personals von 10 Personen.

Diese Basis wurde zur Contröle jener gemessen, welche der französische Oberst le Bonne von München bis Aufkirchen 21655,8 Meter gemessen hatte.

Kann die Grundlinie nach ihrem Terrain nicht in ihrer Verticalebene selbst, oder muß sie außer derselben durch Traversen gemessen werden, §. 7. I., so wird ihre Länge Theilweise polygonometrisch berechnet: sie fällt aber dabey in ihrer wahren Länge immer um so unsicherer aus, je mehr Traversen in ihren Winkelverbindungen aufgenommen werden mußten. §. 8. I. II.

d. Bedienet sich der Geograph hölzerner Stangen für die Messung seiner Grundlinie, in Fällen, wo nicht eben die äußerste Genauigkeit verlangt wird, so kann er diese, wie die eisernen Stangen, in hölzerne Kapseln einfassen, und durch einige in denselben angebrachte Sättel das Werfen der Stangen verhindern; und so mit diesen Stangen die Grundlinie auf Böcken wie in (II.) messen.

Wo dieses nicht ist, muß man die bloßen Stangen auf Latten abschieben, welche an Pfählen feste sind, die man in der Verticalebene der Linie in den Boden gestoßen hat; wornach das Ganze bis auf eine gewisse Strecke von einigen hundert Fußen gleichsam eine Brücke vorstellet, die, nachdem die Stangen über ihr abgeschoben worden sind, abgebrochen und vorwärts wieder aufgeschlagen wird.

Dabey ist aber immer noch die Correction jeder Lage oder Piece, durch die verschiedene hygrometrische Länge der Stangen nothwendig, wo besonders die Stangen nicht mit Oelfirniß überzogen, oder lackirt sind.

Bey der Grundlinie, welche Hr. von Osterwald in der Gegend von München auf einer schönen Ebene maß, wurden die Stangen unmittelbar auf hölzernen Latten abgeschoben, die an Pfähle setzwägig befestiget waren, und jede solche Brücke hatte 600 Fuße.

Jede

Jede fichtene Stange war ferner 12 Fuße lang, an beiden Enden mit eisernen Bixen beschlagen, und eine Lage bestund aus 5 solchen Stangen.

Mit diesen wurde eine Linie das erstemal zu 43824, das anderemal aber zu 43834, 3.. gemessen; so daß sich also ein Unterschied von $9\frac{3}{4}$ Fußen zeigte.

Um sich nun von dem Einfluß zu überzeugen, welchen die Temperatur auf diese Stangen äußert, bestimmte Hr. von Osterwald die Länge der Stangen auf einem ebenen Pflaster bey 9 Grad Temperatur aufs genaueste, und fand ihre Länge

bey 3 Grad . . $60' - 0'' 012$.

— 15 — — . . $60' - 0'' 0''' 1'''' 2$.

— 18 — — . . $60^{\circ} - 0'' 0''' 1'''' 8$.

Ein Grad Unterschied in der Wärme änderte also die Länge dieser Stangen von 60 Fußen um 2 Scrupel, oder 600 Fuße ändern sich um 2 Decimallinien des baierischen Fußes.

Eben so mag auch der Feuchtigkeitszustand der Luft auf die Länge der Stangen gleichzeitigen Einfluß haben, da das Holz, wenn es feuchte wird, aufquillet; wofür aber Hr. von Osterwald hier keine Versuche angestellet hat.

Wenn man daher für nothwendig erachtet, eine Grundlinie mit hölzernen Stangen aufs genaueste zu messen, so muß der Wärme- und Feuchtigkeitszustand der Luft bey jeder Lage notirt, und die Reduction der Länge der Lage nachgehends, wie bey den metallenen Meßruthen, vorgenommen werden.

Dieser Einfluß des Feuchtigkeitszustands der Luft auf die Stangen, wird beinahe unmerklich, wenn die möglichst ausgetrocknete Stangen mit Lack überzogen werden, welcher die Feuchte von ihnen abhält; sie sind als

sol-

solche nur noch der veränderlichen Temperatur exponirt, nach welcher sie sich verlängern und verkürzen, und sich krümmen, oder verwerfen. Man muß daher beim Abschieben der freien Stangen auf der Brücke, sie immer auf die hohle Seite legen, und in soweit beschwehren, daß sie sich flach auf der Brücke auflegen; die übrigens immer so niedrig als möglich ist gebauet wird, um ihr Schwingen zu vermindern.

Eine auf diese Art mit Stangen gemessene Grundlinie gewähret eine große Zuverlässigkeit!

Als ich vor mehrern Jahren den parallactischen Winkel einer Gipskugel für die Eintheilung eines Heliometers unmittelbar bestimmen wollte, maß ich mit hölzernen sehr trockenen Stangen, auf einer gefertigten Brücke eine Linie von 1000 Nürnberger Fußen etliche mal hin und wieder; fand aber bey Anwendung aller möglichsten Sorgfalt und Fleißes nichts destoweniger in dieser Linie Differenzen von $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{2}$ Linie; wornach sich ihre Zuverlässigkeit im Mittel zu $\frac{3}{8.144.1000}$ oder zu $\frac{1}{384000}$ ergiebt.

Hr. Benzenberg führt in seinem vortreflichen Handbuch für angewandte Geometrie, Düsseldorf, bey Schreiner 1813. S. 438. die Messung seiner Standlinien für die Aufnahme des Großherzogthums Berg an, und bemerket, daß die dortigen Geometer bey der wiederholten Abmessung einer Länge von 480 Fußen mit hölzernen Stäben, Differenzen von einer $\frac{1}{2}$ bis einer ganzen Linie fanden; das eine Zuverlässigkeit von $\frac{3}{4.144.480}$ oder von $\frac{1}{92160}$ des Ganzen giebt.

Bey Messung sehr langer Linien können sich die unvermeidlichen Fehler der einen Lage gegen die der andern zum Theil oder ganz aufheben, und sonach die gros-

große Linie eine scheinbar größere Zuverlässigkeit als die kurze erhalten.

So fand Hr. Benzenberg bey Messung der Bergheimer Standlinie,

bey der Messung	ihre Länge
I. . . .	26962 „ 6 „ 0
II. . . .	26962 „ 6 „ 2
III. . . .	26902 „ 4 „ 8
IV. . . .	26962 „ 4 „ 2
	26962 „ 5 „ 3 im Mittel.

Die größte Differenz, welche sich in dieser Linie zeigte, war also nur 6 „ 2 — 4 „ 2 oder 2 Zoll oder $\frac{1}{6}$ Fuß; mithin ihre Zuverlässigkeit $\frac{1}{26965\,„\,5.6} = \frac{1}{161774}$.

Nun war aber nach (c.) die Zuverlässigkeit für metallene Stangen $\frac{1}{1250000}$; folglich verhalten sich beide wie 1250000 : 161774, oder wie 8 : 1 beinahe; oder die Zuverlässigkeit der Messung mit hölzernen Stangen, bey welcher die Correction ihrer hygrometrischen Aenderung beseitiget wird, ist 8mal geringer als die mit aller Sorgfalt und nothwendigen Correctionen bewerkstelligte Messung mit metallenen Stangen.

e. Bey der Aufnahme kleiner Staaten genüget es öfters, wenn man die Grundlinie ihres Dreyecknetzes nur mit der Kette mißt.

Eine solche Meßkette bestehet nun bekanntlich ihrer Substanz nach aus eisernen Dräthen, die an ihren Oehren mit Ringen unter sich verbunden sind. Ihre Länge ist dabey gewöhnlich 50 bis 100 landübliche Fuße; es ist statt der Ringe von 10 zu 10 Fußen gewöhnlich eine Schnalle mit Wendeln angebracht, und die Kette endet hinten und vorne mit einem Ring, durch welchen die Kettenträger eingesteckt werden.

Diese

Diese Kettenträger sind runde Stäbe von Buchenholz auf 4 Fuß lang in $\frac{5}{4}$ Zoll Stärke; sie sind unten in eine runde eiserne Bixe eingeschiftet, über welche die Endringe der Kette eingerieben werden, während in ihrem untern Ende ein eiserner Stachel oder Dorn eingetrieben wird, der ganz concentrisch mit dem Stab und seiner Bixe seyn muß.

Die Kette selbst muß dabey nicht zu stark und nicht zu schwach, und die Ringe ihrer Oehren so dicke seyn, daß sie bey dem Anspannen der Kette nicht die Runde verliehren, die sie durch das Keilen über einen eisernen runden Dorn erhalten haben.

Scharnierartige Verbindungen der Kettendräthe unter sich sind deswegen nicht zu empfehlen, weil sich der Staub und überhaupt die vom Boden bey ihrem Schleifen auf ihm abgerissene Theile, in die Charniere setzen, so daß eine solche Kette ihr Maaß um so mehr ändert, je weniger die sich klemmenden Charniere über dem Boden flach zu liegen kommen. Wie übrigens die Kette mit möglichster Vorsicht für die Abmessung der Linien gebraucht wird, dieß lehret die elementare Geodäsie.

Muß sich nun der Geograph der Meßkette für seine Operationen bedienen, so kommt ihm alles zuvörderst darauf an, die Länge derselben zu prüfen.

In dieser Absicht leget der Geograph vorerst, vierkantig zugeglättete Baustämme über hölzernen Schragen setzwägig an einander, um über ihnen die Kette durch angehängte Gewichte eben so straff auszuspannen, als sie bey ihrem Gebrauch gewöhnlich gespannt wird: er läßt außerdem dort, wo die Endringe der Kette zu liegen kommen, in die Balken messingene mattgeschliffene Bleche ein, und läßt in die Endringe selbst messingene Scheiben genau einpassen, die in ihrer Mitte ein feines ausgetieftes Loch haben.

Liegt nun die Kette bey einer gewissen Temperatur im Schatten auf dem Balken ausgespannt, so sticht der Geograph mit der Radiernadel, durch die ausgetieften Löcher der Ringscheiben auf den unter ihnen liegenden Blechen feine Puncte, deren Abstand von einander die Länge der Kette für diese Temperatur determiniren.

Erleuchtet nachgehends die Sonne die Kette, und dehnet sie dadurch pyrometrisch aus, so wiederholet der Geograph diese Operation für verschiedene Temperaturen, bis zur höchsten, welche die Kette ihres Orts annehmen konnte.

Sind nun die Puncte auf den Balkenblechen aufs genaueste eingestochen, so nimmt der Geograph die Latte ab, und schiebet nun das Muttermaaß zwischen denselben ab, §. 8. IV.; um dadurch die Länge der Kette vorerst für die Temperatur des Schattens zu finden.

Ist dieses eine Ruthe von 10 Fußen, die sich innerhalb der Schatten-Gränzpuncte gerade 10mal abschieben läßt, und es verbleibt noch ein Excedens übrig, das sich auf dem tausendtheiligen Maaßstab zu 0,004 des landüblichen Fußes ergiebt; so ist die Länge der Kette für die Temperatur des Schattens $100 + \frac{4}{1000}$ eines Fußes.

Eben so findet sich auch ihre Länge aus den Gränzpuncten für jede beobachtete Temperatur, und dadurch auch die pyrometrische Aenderung der Kettenlänge für jede Temperatur; wornach sich die logistische Scale ihrer pyrometrischen Ausdehnung, nach §. 8., construiren oder auch berechnen lässet, von welcher der Geograph nachgehends bey dem Gebrauch der Kette für die Verification der Grundlinie Gebrauch machen kann.

Bey dem Gebrauch der Kette ist nemlich ihre Temperatur mit der Temperatur der Luft über dem Boden, auf welchem sie geschleift wird, und mit der Temperatur des Bodens selbst, welche dieser seines Orts nach sei-

ner Beschaffenheit, nach seiner Erleuchtung, und nach den ihn bestreichenden Winden annimmt, und mit der Reibung in Beziehung, welche sie über ihm leidet; je nachdem er urbarer, kalter oder warmer, bestockter oder unbestockter Boden ist.

Es nimmt deswegen der Geograph, nachdem er eine bestimmte Anzahl von Zügen mit der Kette gemacht hat, ihre Temperatur durch das Anhalten eines Thermometers an verschiedenen Stellen der Kette ab, und notiret sich dieselbe, um nachgehends die Länge der Kette auf jene Temperatur zu reduciren, welche sie während der Messung der Grundlinie am meisten hatte.

Diese Versuche sind außer der Regel immer da nothwendig, wo die Kette ein anderes Terrain berühret, oder wo sie z. E. durch Grasboden gezogen wird, nachdem sie zuvor eine Zeit lang über urbaren Boden oder Ackerland geschleift wurde; oder wo das Ackerland zwischen Sandboden und bindenden Boden wechselt, u. dergl.

Tage, an welchen die Sonne mit Wolken bedeckt ist, sind daher für die Linienmessung mit der Kette am geeignetsten; weil sich an solchen ihre Temperatur weniger ändert.

Nichts destoweniger aber stehet die Zuverlässigkeit der Messung mit der Meßkette ihrer Abmessung mit Stäben sehr nach.

So gab die fünfmalige Abmessung der Mindelheimer Standlinie mit der Kette im Mittel 24066; und die einzelnen Kettenmessungen weichen bis auf 16 Fuße von einander ab.

Die Zuverlässigkeit der Messung war also hier $\frac{16}{24066}$ oder $\frac{1}{1504}$; das ist: man kann 1500 Fuße nur auf einen Fuß auf jenem Boden sicher messen; wenn man die Correctionen der Kette wegen ihrer verschiedenen Temperatur

tur beseitiget; oder die Zuverlässigkeit der Kettenmessung ist $\frac{161774}{1504}$ oder über 100mal geringer als mit den höl-zernen Meßstangen.

Reduction der verificirten Grundlinie auf dem Seehorizont.

IV. Nach der Messung der Grundlinie (II.) stellet jede auf den Schragen liegende Piece eine Tangente der Erdcurve vor, welche man sich durch ihre Mitte parallel mit ihrem trockenen Sürfas §. 1. l.c. gezogen denket; und es kommt der Mitte der Grundlinie, der ihr entsprechende Erdhalbmesser MQ in Fig. 1. als ihr Halbmesser zu.

Bezeichnet nun der Buchstabe (δ) die Eminenz der Mitte, oder den senkrechten Abstand der Mitte der Grund-linie von ihrem trockenen Sürfas; (b) die verificirte Län-ge der Grundlinie (III.) und (β) ihre auf den Seehori-zont, oder auf ihren trockenen Sürfas reducirte Länge, so ist ihr Halbmesser $\varrho+\delta$; und

$$b:\beta = \varrho+\delta:\varrho;\quad \beta = \frac{b\varrho}{\varrho+\delta};\quad \text{mithin auch}$$

$$b-\beta = b-\frac{b\varrho}{\varrho+\delta} = \frac{b\delta}{\varrho+\delta} = \varrho\cdot\frac{b\delta}{\left(\frac{1+\delta}{\varrho}\right)}:$$

$$= \frac{b\delta}{\varrho}\cdot\left(\frac{1+\delta}{\varrho}\right)^{-1};\quad \text{oder}$$

$$b-\beta = \frac{b\delta}{\varrho}\cdot\left(1-\frac{\delta}{\varrho}+\frac{\delta^2}{\varrho^2}-\frac{\delta^3}{h^3}\right)+\ldots$$

aus welcher Formel sich also die Differenz beider Linien finden lässet.

Auch ist der Halbmesser dieser Basis

$$\varrho = \frac{a}{\sqrt{(1-\varepsilon^2.\mathrm{Cos}L^2)}}\ \text{§. 2. III.}$$

Wollte man unter gewissen Umständen statt des, der Mitte der Grundlinie entsprechenden Erdhalbmessers ihren Krümmungshalbmesser substituiren, so wäre hier nach

§. 2. VI. $\varrho = \frac{a.(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2 \operatorname{Sin}\omega^2.\operatorname{Cos}L^2)\sqrt{(1-\varepsilon^2.\operatorname{Sin}L^2)}}$.

Es sey z. E. das verificirte Maaß der Grundlinie 13798 Meter, ihre mittlere geographische Breite 48°„31′„0; ihre Abweichung von ihrem Meridian 23°„0. und ihr Abstand vom Seehorizont 292 Meter.

Nimmt man nun den Halbmesser des Aequators zu 6375740 Meter, und die kurze Axe zu $\mu a = \frac{3}{3}\frac{3}{3}\frac{3}{4}\,a$ an; so ist hier

$L = 48°„31'$; $\omega = 23°„0'$; $\delta = 292$; $b = 13798$. Meter.

mithin

$1-\mu^2 = \frac{667}{111557} = 0{,}0059786 = \varepsilon^2$; $\log \varepsilon^2 = 0{,}7765700-3$.

ferner

$1-\varepsilon^2 = \mu^2 = (\frac{3}{4}\frac{3}{3}\frac{3}{4})^2$; $\log(1-\varepsilon^2) = 0{,}9973954-1$;

$\log a = 6{,}8045308$.

$\log a = 6{,}8045308$	$\log \varepsilon^2 = 0{,}7765700-3$
$\log(1-\varepsilon^2) = 0{,}9973954-1$	$1.\operatorname{Sin}\omega^2 = 19{,}1837560-20$
$6{,}8019262-0$.	$1.\operatorname{Cos}L^2 = 19{,}6399522-20$
Absol. Zahl 6337600.	$4{,}6002782-7$.
	Absol. Zahl 0,00039836
	1
	0,99960164.
	$\log 4{,}9998262-5$.

$\log \varepsilon^2 = 0{,}7765700-3$

$1.\operatorname{Sin}L^2 = 19{,}7491358-20$

$4{,}5257058-7$.

Absol. Zahl 0,0033551

1

0,9966449. $\operatorname{Log} = \frac{5{,}9985427-6}{2{,}9992713-3}$

4,999

4,9998262—5	log (1—ε² Sin ω². Cos L²)
2,9992713—3	log √(1—ε² Sin L²)
7,9990975—8	
16,8019262—10 =	log a. (1—ε²)

log ϱ = 6,8028287.

ϱ = 6350800. Meter.

Ist die geographische Breite der Mitte der Grundlinie, auch beinahe die mittlere eines Staates, dessen Breitendifferenz nur etliche Grade mißt, so kann dieser Krümmungshalbmesser, auch für den Halbmesser der Sphäre gelten, §. 1. III. b., welche den elliptischen Breitenbogen des Staates osculirt.

Da sich ferner dieser Halbmesser nicht bedeutend ändert, wenn auch der Azymuthalwinkel, und die Polhöhe der Mitte der Grundlinie sich etwas weniges ändern, so genüget es immer, wenn der Geograph die Polhöhe der Mitte seiner Grundlinie nur beiläufig aufnimmt, und rücksichtlich des Azymuthalwinkels, die Mittagslinie nur technisch ziehet.

Nun ist ferner in diesem Fall

$$\frac{\delta}{\varrho} = \frac{292}{6350800} = 0{,}000046; \quad 1 - \frac{\delta}{\varrho} = 0{,}999964.$$

Ferner ist	log b	= 4,1398161
	log δ	= 2,4653829
		16,6351990—10.
	log ϱ	= 6,8028787
		4,8323703— 5.
	log 0,999964	= 4,9999826— 5
	log (b—β)	= 4,8323529— 5.
	b—β	= 0,67976 Meter.

Die auf dem Seehorizont, oder auf ihren trockenen Sürfas reducirte Grundlinie wäre daher

13798 — 0,67976 = 13797,32024 Meter.

Der

Der Centerwinkel der reducirten Grundlinie.

V. Dieser auf den Seehorizont reducirten Grundlinie, kommt nun am Ende ihres Halbmessers immer ein gewisser Winkel zu, welchen sie allda mißt, der deswegen ihr Center- oder parallactischer Winkel heißt.

Dieser Centerwinkel ist nun in den meisten Fällen niemalen groß; er würde erst einen Grad beiläufig messen, wenn die Grundlinie 15 geogr. Meilen lang wäre; statt dessen die bisher gemessenen höchstens 8 bis 10 Stunden lang waren.

Denkt man sich nun eine Sphäre von dem Halbmesser ϱ. (IV.), so ist ihr halber Umfang von 180.60.60 oder 648000 Secunden gleich ($\pi\varrho$).

Setzt man daher den Bogen der auf den Seehorizont reducirten Grundlinie $= b'$, und ihren Centerwinkel $= \eta$; so ist auch

$$\pi\varrho : b' = 648000 : \eta; \quad \eta = \frac{b'}{\pi\varrho} . 648000.$$

Ist hier nach (IV.) $b' = 13797{,}32$ Meter; $\varrho = 6350800$ Meter, so ist einmal

$$\log \pi = 0{,}4971498.$$
$$\log \varrho = 6{,}8028287.$$
$$7{,}2999785.$$
$$\log 648000 = 5{,}8115750.$$
$$4{,}5115964 - 6.$$
$$\text{Absolutzahl} = 0{,}03247854.$$
$$\eta = 13797{,}32 . 0{,}032478 = 448{,}1092. \text{ Secunden.}$$

Bey dieser Basis macht daher eine Differenz von einer Secunde im Centerwinkel eine Differenz im Bogen von beinahe 30,8 Metern.

Die astronomische Grundlinie.

VI. Finden sich in dem aufzunehmenden Staate zwey weit von einander entfernte Objecte A „B, von welchen man von einem zum andern sehen kann, und der Geograph kann die Polhöhen derselben mit der größten Genauigkeit beobachten, so kann er aus der Differenz derselben, und ihrem Azymuth den Erdbogen bestimmen, der auf dem Seehorizont zwischen die Projectionspuncte von A und B §. 1. III. hinein fällt.

Je größer nun dieser Bogen oder Centerwinkel der Grundlinie (V.), je weiter die Aussicht von den Stellen A und B in ihrer Gegend, je geeigneter jede für astronomische Beobachtungen nach der Festigkeit des Locals ist, und je weniger das Loth durch die Anziehung benachbarter Berge afficirt wird, §. 1. II., um so besser qualificiren sich diese Gegenstände für die Endpuncte einer astronomischen Grundlinie.

Nimmt der Geograph an den Enden dieser Grundlinie, die Winkel nach Gegenständen auf, die ihm nach ihrer Lage und Entfernung geeignete Dreyecke der ersten Classe abgeben, §. 4. VIII., so gewinnt er dadurch den Vortheil, sogleich von der Grundlinie aus große Dreyecke zu erhalten; statt dessen er bey einer geodätischen Grundlinie von kleinen Dreyecken in immer größere übergehen muß, bis er die Seite eines Primär-Dreyecks erreichen kann.

Wenn nun auch die astronomische Grundlinie von dieser Seite diesen Vortheil gewähret, so hat sie statt dessen das nachtheilige an sich, daß die Folgen der bey ihr unvermeidlichen Fehler auf die Seiten der Dreyecke um so spürbarer werden, je kleiner die Grundlinie an und für sich, und je geringer die Zuverlässigkeit ist, mit welcher man die Polhöhen ihrer Enden bestimmen kann.

Die-

Diese Zuverlässigkeit ist, wenn man auch der beßten Vollkreise sich bedienet, §. 4. VII., und die Höhenwinkel mehrere hundertmal repetiret, §. 4. VI. e., für jede Polhöhe höchstens ½ Secunde. Nun ist es möglich, daß die Polhöhe des einen Endes der Grundlinie um ½ Secunde zu groß, die des andern aber um eben so viel zu klein gemessen wird, oder beide sich wechselseitig gegen einander aufheben; aber eben so ist es auch möglich, daß beide auf eine Seite fallen, mithin der Centerwinkel um eine Secunde zu groß oder zu klein gemessen wird, wenn die Grundlinie selbst in dem Meridian ihres Anfangs oder Endes liegen sollte.

Dieser ganz unvermeidliche Fehler ändert aber nach (V.) die astronomische Grundlinie schon über 30 Meter, welche Differenz bey einer geodätischen Grundlinie, wenn auch auf sie mehrere Dreyecke fundirt werden müßten, bis man zur Seite eines Primär-Dreyecks gelangt, schlechterdings nicht statt finden kann.

Eine geodätische Grundlinie gewähret daher eine bey weitem größere Zuverlässigkeit als eine astronomische; und letztere ist daher nur zu gebrauchen, wo man Veranlassung nimmt, die Lage der Hauptorte eines großen Staates astronomisch zu bestimmen. §. 4. II.

a. Nimmt man an den Enden einer solchen Grundlinie ihre Polhöhen, so giebt der Unterschied derselben, beinahe die Breiten-Differenz beider Enden, oder den Bogen des Meridians, der zwischen die durch die Enden der Grundlinie gelegte Parallelkreise trift; und man muß deswegen noch an einem Ende den Azymuthalwinkel messen, und den Bogen berechnen, welchen die Grundlinie selbst auf der sie osculirenden Sphäre mißt.

Rücksichtlich dessen denke ich mir ein sphärisches Dreyeck BAC, bey welchem der rechte Winkel in A fällt, und dessen Seite (c), welche dem Winkel (C) gegenüber

stehet,

stehet, die Breiten-Differenz der Enden der Grundlinie ihr Azymuthalwinkel = B und die Grundlinie selbst, als die Hypothenuse = a ist.

Für dieses Dreyeck ist nun nach der analytischen sphärischen Trigonometrie

$$\text{tang } c = \text{Cos } B \,.\, \text{tang } a\,;\ \text{tang } a = \frac{\text{tang } c}{\text{Cos } B}\,.$$

Da man ferner den Logarithmen des Sinus (a) bey der trigonometrischen Rechnung scharf nothwendig hat, so kann man auch setzen

$$\frac{\text{Sin } a}{\sqrt{(1-\text{Sin } a^2)}} = \text{tang } c\,.\,\text{Sec.B}\,;\quad \text{oder}$$

$$\frac{\text{Sin } a^2}{1-\text{Sin } a^2} = \text{tang}^2\, c\,.\,\text{Sec.}^2\,B\,;\quad \text{und hieraus}$$

$$\text{Sin}^2\, a = \frac{\text{tang}^2\, c\,.\,\text{Sec}^2\,.\,B}{1+\text{tang}^2\, c\,.\,\text{Sec}^2\,.\,B}\,;\quad \text{oder}$$

$$2\log \text{Sin } a = 2\,\text{l.tang } c + 2\,\text{l.Sec.}z - \text{l.}(1+\text{tang}^2\, c\,.\,\text{Sec}^2\,.\,B).$$

Nun ist aber $\log(1+x) = M\,.\,(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 -$, wo bekanntlich $M = 0{,}43429448$ ist; es ist daher auch

$$\log(1+\text{tang}^2\, c\,.\,\text{Sec}^2\,.\,B) = M\,(\text{tang } c\,.\,\text{Sec. } B - \tfrac{1}{2}\text{tang}^2\,.\,c\ \text{Sec}^2\,.\,B + \tfrac{1}{3}\,\text{tang } c^3\,.\,\text{Sec. } B^3 - ;$$

wornach sich also log Sin a aufs genaueste finden läßt.

b. Bezeichnet ferner (a) den observirten und verbesserten Centerwinkel der astronomischen Basis; und ϱ den Erdhalbmesser ihrer Mitte; und L ihre Länge im Längenmaaß, so ist auch $360 : a = 2\pi\varrho : L$; oder

$$L = \frac{2\pi\varrho a}{360} = \frac{\pi}{180}\,.\,\varrho\, a.$$

Auch ist die Chorde dieser Basis $2\varrho\,\text{Sin}\,\frac{1}{2}a$. Setzt man nun die Differenz des Bogens von seiner Chorde $= \delta$; so ist auch

$$\frac{\pi}{180}\,.\,\varrho\, a - 2\varrho\,.\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}a = \delta.$$

Nun

Nun ist aber $\text{Sin}\, x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2..5} - \frac{x^7}{1.2..6.7} +$

Setzt man nun $x = \frac{1}{2}a$, so ist auch

$$2\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}a = 2\left(\tfrac{1}{2}a - \frac{a^3}{1.2.3.2^3} + \frac{a^5}{1.2.3.4.5.2^5} - \frac{a^7}{1.2...6.7.2^7}\right);$$

mithin

$$\delta = \frac{\pi}{180}a - \left(a - \frac{a^3}{1.2.3.2^2} + \frac{a^5}{1.2..4.5.2^4} - \frac{a^7}{1.2..6.7.2^6}\right)\varrho.$$

Addiret man nun diese Differenz zu jener Chorde, so giebt sich die astronomische Basis im Längenmaaß aufs genaueste reducirt.

§. 11.

Aufnahme eines kleinen Staates.

Unter einem kleinen Staat verstehe ich hier einen solchen, dessen größtes ihn einschließendes Dreyeck, noch keinen merklichen sphärischen Exceß haben kann; der also in seiner Quadratseite höchstens 6 geogr. Meilen mißt, §. 2. X. Es kann daher ein solcher Staat auch nur ein Amt eines großen Staates seyn; und seine Aufnahme gehört daher unter die Cathegorie der Aemteraufnahme eines Staates.

Die trigonometrische Aufnahme eines solchen Staates gehet daher immer nur nach den Principien der ebenen Trigonometrie vor sich; oder die Seiten des Triangularnetzes, welches über ihn ausgespannt wird, werden als geradlinicht angesehen: auch liegt dasselbe in der Ebene seiner Grundlinie ohne weitere Reduction derselben auf den Seehorizont, §. 9. IV.; es wäre denn, daß bey der Aemteraufnahme der Geograph die Seite eines Dreyecks für die Grundlinie substituiren wollte, die bereits nach einer auf den Seehorizont reducirten Grundlinie berechnet ist. §. 9. I. d.

Statt

Statt dieser Reduction auf den Seehorizont, reducirt man die Grundlinie gerne auf die Ebene, in welcher die meisten Orte des Landes, nach ihrem barometrischen Nivellement liegen.

Liegen diese meistens 1800 Fuße über den Seehorizont, so reducirt man auch die Grundlinie auf eine Höhe von 1800 Fußen über dem Seehorizont, nach §. 9. IV.

Indem man nun für die Aufnahme eines kleinen Staates nicht gerne großen Aufwand macht, so genüget es meistens, wenn die Grundlinie unmittelbar nur durch die Meßkette gemessen wird; auch muß sich der Geograph öfters statt eines kostbaren Geodolithen mit einem Spiegelsextanten, oder auch nur mit einem Winkelmesser begnügen, dessen Eintheilung nur einzelne Minuten oder prima minuta anspricht; es bleibet daher für ihn Hauptregel, alle Winkel, die vor andern aufs genaueste genommen werden müssen, durch Multiplication zu nehmen, §. 4. VI., und die Grundlinie so genau als möglich ist, mit der Meßkette wiederholt zu messen. §. 10. III. d.

Die Aufnahme der Länder nach den Principien der ebenen Trigonometrie, wurde seither auf Staaten angewandt, die mehrere hundert, und selbst mehrere tausend Quadratmeilen messen, obgleich diese Aufnahme bey so großen Ländern, wie in der Folge gezeigt werden wird, nicht so ganz genau, wie ihre sphärische Aufnahme ist.

Die K. Baierische Monarchie war in Teutschland die erste, welche durch den Kön. Steuerrath Hrn. Soldner, sphärisch aufgenommen wurde, zu einer Zeit, wo die neuesten sphärischen Messungen in Frankreich durch die Herren Mechain und de Lambre noch nicht öffentlich bekannt gemacht worden waren.

Nun können aber bey der Aufnahme eines kleinen Staates mancherley Messungsmaximen angewandt werden,

den, die bey einem großen nicht statt finden, dessen Aufnahme sich meistens auf ein bloßes Trianguliren erstreckt; man kann bey jenem manchmal die Centralmethode, öfters die Diagonal- und Peripherialmethode anwenden; und führt die Triangularmethode nur da aus, wo keine der vorigen anwendbar ist.

Die Centralmessung.

I. Diese Messung findet nur da ihre Anwendung, wo in dem kleinen Staat ein Berg oder Landhöhe sich vorfindet, auf welchem man ihn ganz übersehen kann; und wo man außerdem noch von den Grenzen des Staates hin und wieder nach einem auf jenem Berge aufgestellten Signal eine freie Aussicht hat.

1) Bevor nun der Geograph die Aufnahme selbst beginnet, recognoscirt er das aufzunehmende Terrain aufs sorgfältigste; er suchet dabey insbesondere vorerst auf dem höchsten Berg des Landes nach Fig. (33.) in C jene Stelle aus, in welcher er seine meisten Ortschaften und sonst merkwürdige Stellen übersehen kann, und nimmt allda vorläufig mit einem kleinen Winkelmesser, Visionen nach allen dort sichtbaren Orten und merkwürdigen Gegenständen; um diese bey seinem Brouillon zum Grunde zu legen. §. 4. III.

Es sucht nachgehends der Geograph an den Gränzen jene Orte und Stellen auf, welche die weiteste Aussicht unter sich selbst und nach dem Centralpunct C gewähren; er nimmt allda die Winkel jeden solchen Orts auf, um nachgehends aus dem gefertigten Brouillon die Orte A„ B„ F„ G„ D auszusuchen, welche Dreyecke ACB„ DCF„ GCA„ GDC„ gewähren, die sich nach ihrer Form am zuverlässigsten berechnen lassen. §. 8. I.

Wo sich für diesen Behuf keine Orte wirklich vorfinden, stellet der Geograph auch Signale der dritten Klas-

Klasse auf, §. 4. IV.; er setzet dieselbe besonders auch dort, wo Waldungen die Aussicht hindern; oder wo sonst Thäler aufgenommen werden müssen, um für diese die Verbindung mit der Dreyeckreihe zu finden.

Für diese Dreyeckreihe, welche das aufzunehmende Land überspannet, muß ferner der Geograph das Terrain aufsuchen, auf welchem sich eine schickliche Grundlinie messen lässet! Findet sich dieses in dem Hauptdreyeck BCF, so bestimmet der Geograph den Anfangspunct (″) der Grundlinie in der Verticalebene durch C und F, nach §. 10. I. e.; mißt nun die Linie ″x selbst, und findet durch sie die Seite CF des Dreyecks BCF, und mit dieser das Dreyeck BCF„ ACB„ ACG„ GCD ...

Würde sich keine schickliche Grundlinie angeben, so müßte eine der Umfangsseiten der Hauptdreyeckreihe durch Traversen §. 7. I. gemessen, und jene hiezu gewählt werden, wo sich die Traversen nach dem Terrain am sichersten messen lassen, und wo außerdem ihre Winkelverbindung am einfachsten ist; um durch sie die Seite selbst mit möglichster Zuverlässigkeit zu finden.

2) Sind nun nach dem Brouillon die Hauptdreyecke fundiret, und die Grundlinie gemessen, so schreitet der Geograph für ihre wirkliche Aufnahme selbst vor, indem er alles übrige noch auf sich beruhen lässet.

Er nimmt deswegen die Winkel nach den Puncten A„ B„ F„ G„ D in C multiplicationsweise auf, §. 4. VI. f.; verfähret eben so auch an diesen Puncten selbst; und nimmt an allen diesen Stationen Visionen nach allen, an jeder derselben sichtbaren Orten, Signalen und sonstigen für die Charte des Landes merkwürdige Stellen; um aus diesen seine Secondärdreyecke I„ II ꝛc. zu construiren.

Ist nun nach vollbrachter Winkelprobe die Reihe der Primär- und Secondärdreyecke gehörig in Rechnung gezogen, und in der Station C der Winkel ACN gemessen,

wel-

welchen die Seite AC mit der Mittagslinie der Stelle C macht, so berechnet der Geograph nach demselben auch die Ordinaten Aa′„ Bb′ und die Abscissen Ca′„ Cb′ der Puncte A„ B u. s. w. und trägt nun darauf an, die Sectionen (III.) und (IV.) gehörig aufzunehmen.

3) Könnte der Geograph die Seite DC durch eine neue Grundlinie bestimmen, so kann er nach derselben die Rechnung seiner Dreyecke halb rechts und halb links führen; das ist: er kann AC durch die Dreyecke DCG„ GCA, so wie durch die Dreyecke CFB„ ACB berechnen, und nachsehen, wie beide Rechnungs-Resultate für die nemliche Seite AC zusammen treffen: er beachtet seine trigonometrische Arbeiten für richtig, wenn er für die Seite AC jedesmal das nemliche Rechnungsresultat, bey vorausgesetztem richtigen Calcul findet.

Sollte aber sich in der Seite AC eine Differenz finden, die größer ist, als daß sie nach dem Maaßstab der Karte in einem Puncte zerfiele, so verificirt der Geograph die Aufnahme seiner Primär-Dreyecke vorerst folgendermaßen, durch die Interpolirung jener Differenz.

Es habe sich z. E. die Seite AC durch die Dreyecke zur Rechten zu 25784 Fußen, und durch die Dreyecke zur Linken zu 25786 Fußen ergeben, so ist die in ihr bestehende Differenz gerade 2 Fuße.

Berechnet nun der Geograph die Zuverlässigkeit, mit welcher er die Seite AC von der rechten und linken Seite her bestimmen kann, §. 8.; so findet er, daß er in Bestimmung der Seite AC von der rechten Seite her höchstens um 3 Fuße und von der linken um 2 Fuße fehlen könne. Da nun hier die Summe der unvermeidlichen Fehler 5 Fuße ist, so interpolirt er die vorfindliche Differenzen nach der Analogie $5:2 = 3:\frac{6}{5}$; und $5:2 = 2:\frac{4}{5}$; er macht also die Seite AC von der rechten Seite her um $1\frac{1}{5}$ größer, und von der linken Seite her um $\frac{4}{5}$ Fuß kleiner;

ner; und ändert nun die Dreyecke ACB„BCF in ihren Seiten und Winkeln so lange, bis sie AC = 25784+1 1/5 Fuß geben; er ändert eben so die Dreyecke DCG„GCA so lange, bis sie AC = 25786—4/5 geben.

4) Um ferner auch die Secondär-Dreyecke zu verificiren, ehe der Geograph sie in die Charte aufnimmt, bedienet sich derselbe der Alignements, oder solcher Orte und Stellen, die in einerley Verticalebene liegen, wie z. E. die Orte o„p„r, in dem Primär-Dreyeck ACB und BCF.

Für diese berechnet er den Winkel opr aus den gemessenen und berechneten Stücken, und sieht nach, ob derselbe gerade 180 Grade hat; er ändert die Winkel der Secondär-Dreyecke, aus welchen sich diese Puncte ergeben, so lange, bis diese Eigenschaft zutrift.

Wo drey oder mehrere Puncte, welche Primärdreyecken angehören, in einerley Verticalebene liegen, wird ihre Lage auf ähnliche Art verificirt; es ändert dabey der Geograph jene Winkel am meisten, auf welche er das wenigste Zutrauen haben kann.

5) Alle diese Berechnungen und Verificationen mit der aus ihnen sich ergebenden Coordinaten (2) vollführet der Geograph als Vorbereitung für die Fundirung seiner Charte, in Stunden, die ihm seine Operationen im Freien übrig lassen; er schreitet erst nachgehends für die Aufnahme der Sectionen III. und IV. in Fig. (33.) vor, die nicht triangulirt werden können.

Von diesen ist nun die Section (III.) ein großer Forst, in welchem mehrere Orte liegen, zu welchen verschiedene Straßen führen; und (IV.) ist ein tiefes Thal, in welchem mehrere Ortschaften liegen, die unter sich keine freie Aussicht gewähren.

Um nun die Section (III.) gehörig aufzunehmen, bemühet sich der Geograph zwischen der Gränze des Staa-

tes

tes von dieser Seite, und der Brahme des Waldes gerade Linien oder Durchschläge Da„ab„bc... abzustecken; er traciret diese Linien durch den Wald selbst, wo er sonst für sie kein schickliches Locale findet.

Er mißt ferner diese Linien mit der Kette aufs genauste, und wendet dort die Staffelmessung an, §. 5. III. b., wo sie nothwendig ist; er mißt ferner die zwischen diese Linien fallende Winkel; und berechnet nun nach vorgenommener Winkelprobe die Abscissen und Ordinaten der Puncte D„a„b„c....., indem er die Linie FC für die Abscisse mit ihrer Verlängerung Cq, und den Anfangspunct der Abscissen in F. annimmt; er findet so nach §. 7. III. die Linie CF. polygonometrisch, und kann ihr Maaß mit dem trigonometrisch gefundenen zusammen stellen; um nach ihr seine polygonometrische Messung zu controliren und zu verificiren.

Von diesen Durchschlägen oder Fluchtlinien Da„ab„bc... aus nimmt der Geograph ferner solche Orte oder Stellen (1)„(2) u. s. w. auf, die er durch sie durchs Triangulir'en, oder auch durch einen Perpendikel bestimmen kann.

Wo ferner eine Straße die Fluchtlinie wie bey de in (o) durchschneidet, die nach einem Orte (p) im Walde führet, nimmt der Geograph diese Straße durch die Fluchtlinien (o3)„(3„4)„(4„5)„(5„p) auf, und berechnet ihre Ordinaten und Abscissen für den Perpendikel, nach §. 7. II. c.; um den Ort (p) in gehörigen Verband mit dem Ganzen zu bringen.

6) Nach diesen Principien nimmt der Geograph auch die Section (IV.) auf. Er stecket nemlich in dem Thale Fluchtlinien Fα„$\alpha\beta$„$\beta\gamma$... ab, mißt dieselbe mit ihren einschließenden Winkeln; und berechnet die Ordinaten und Abscissen dieser Puncte, indem er die Linie FB als Abscisse für den Anfangspunct F gelten läßet: er nimmt

von

von diesen Linien auch Orte und Stellen 7„8„ auf, wie in (3).

Hat der Geograph sonach die Abscissen und Ordinaten seiner Primär- und Secondär-Dreyecke, so wie die der Sectionen (III.)„(IV.) berechnet, so ist dadurch für die Fertigung der Charte selbst der Grund geleget; indem er durch diese Linien die aufgenommenen Puncte in die Charte verzeichnen, und aus diesen nachgehends andere Bestimmungen ausführen kann; wie ich in der Folge zeigen werde.

Uebrigens ist die Rechnung der Coordinaten der Primärdreyecke folgende. Es sey der Winkel, welchen die Linie AC mit der Mittagslinie NM der Stelle C macht, gleich (φ); so ist in dem bey (a′) rechtwinklichten Dreyeck Aa′C

die Ordinate $Aa' = AC.Sin\varphi$; Abscisse $Ca' = AC.Cos\varphi$;

ferner ist für den Ort (G) der Winkel $NCG = ACG - \varphi$; mithin

$Gg' = GC.Sin(AGg - \varphi)$; $Cg' = GC.Cos(ACG - \varphi)$.

$Bb' = BC.Sin(ACB + \varphi)$; $Cb' = BC.Gos(ACB + \varphi)$ u. s. w.

Aufnahme eines Landes, nach einer oder mehrern Diagonalen.

II. Bey der Aufnahme eines Landes nach der Triangular-Methode, können sich die Folgen der bey jedem Dreyeck unvermeidlichen Fehler §. 8. nach und nach mit ihrer Anreihung dermaßen anhäufen, daß sich endlich das Triangularnetz nach den Gränzen des Staates hin, mehr oder minder verschieben muß, mithin die Ortsbestimmungen selbst mit ihrer wahren Lage auf der Erde nicht mehr überein kommen.

Dieses Verschieben der Dreyecke kann bey sonst übrigen Umständen um so bedeutender werden, je größer das Triangularnetz nach der Größe des Staates an und für

sich, je größer die Folgen der unvermeidlichen Fehler nach der Gestalt der Dreyecke sind, und je näher die gemessene Basis an der einen Gränze des Staates selbst gewählt werden muß: es controliret dabey die an der andern Gränze gemessene Verifications-Basis wohl die Längen der bestimmten Seiten, verbürget aber dabey ihre verschobene Richtung nicht; weil sie selbst in die Verbindung des Ganzen mit eingereihet wird.

Dieses Verschieben des Netzes könnte hingegen bedeutend vermindert werden, wenn der Geograph vor der Aufnahme seiner Triangularreihe durch das aufzunehmende Land eine gerade Linie nach §. 9. II. abstecken könnte oder wollte, die ihm bey seinen Operationen die Stelle einer Richtungs- oder Directionslinie vertretten würde; er würde nach derselben sich gegen das Verschieben seiner Dreyecke um so mehr sichern, je besser er dieselbe durch die Mitte des Staates ziehen konnte; weil sich in dieser Lage die Folgen der bey dem Trianguliren unvermeidlichen Fehler bisectiren, oder die eine Hälfte derselben auf diese, die andere auf jene Seite fällt!

a. Denn einmal ist der Geograph der Lage jener Objecte A„B°„C°„D° in Fig. 34. Tab. III. gewiß, welche die Directionslinie selbst überschneidet; er kann in ihrer Lage zur Seite dieser Linie höchstens um so viel fehlen, als er die Linie selbst nicht ganz gerade abstecken kann. §. 9. I.

Er ist eben so auch der Lage jener Objecte in soweit gewiß, die der Richtungslinie sehr nahe liegen, wie z. E. C„G„H...; weil er ihren senkrechten Abstand von ihr entweder unmittelbar messen, oder denselben durch eine kurze Basis trigonometrisch bestimmen kann.

Kann in der Ebene der Richtungslinie selbst ein Theil derselben $\beta\gamma$ unmittelbar gemessen werden, so kann er

sich

sich dieses Stücks als einer Basis bedienen, um die Lage anderer entfernter Objecte D„C„ nach derselben zu bestimmen; er kann auf diesem Wege die Lage um so mehrerer Objecte nach der Richtuug der ganzen durch den Staat gehenden Linie sicher bestimmen, je mehr Stücke der Richtungslinie sich da und dort messen, oder auch trigonometrisch durch eine benachbarte Basis sich bestimmen lassen.

Kann statt dessen, oder neben diesem eine Linie BC gemessen, oder bestimmt werden, welche die Richtungslinie durchschneidet, so bestimmt sich die Lage der Puncte B„C durch dieselbe und durch den gemessenen Durchschnittswinkel A = B; und es können nach Umständen aus der Linie BC die Lagen anderer Objecte 1„Z... bestimmt werden; wobey die Distanzen BZ„1C neuerdings die Basen für die fernere Triangulirung abgeben.

Eben so verhält sichs auch, wenn mehrere die Richtungslinie durchschneidende Distanzen z. E. GH bestimmt werden können: man erhält die Lage um so mehrerer Objecte, gleichsam isolirt, oder aus der nächsten Quelle; es häufen sich die unvermeidlichen Fehler bey denselben nicht an; und man kann Distanzen, welche sich durch die Linie BC gefolgert haben, durch die Resultate controliren, welche sich für dieselbe aus der GH ergeben; und so ihre wahre Lage, durch die Folgen der unvermeidlichen Fehler ausgleichen.

Sind auf diese Art die Distanzen sämmtlicher aus der Richtungslinie sichtbarer Objecte bestimmt, und die Winkel AEH„ACF„Aγ D... aufs genaueste gemessen, so kann man auch die Länge der Directionslinie von einem Durchschnittspunct zum andern, mithin auch ihre ganze Länge selbst unmittelbar berechnen. Man findet so den wahren Durchschnitt des Staates von einer seiner Gränzen zur andern auf dem nächsten Wege; und es vertritt

sonach für diese Bestimmung, als für die Bestimmung der Objecte, welche aus der Richtungslinie sichtbar sind, so wie für die aus denselben sich folgernde Triangularreihe zur Rechten und Linken, die Directionslinie gleichsam die Wurzel, aus welcher der Baum selbst nach und nach erwächset.

Fällt die Richtung dieser Linie in die Mittagsebene eines Orts, so könnte man sich ihrer auch für den ersten Meridian des Staates bedienen, wenn sie sonst nach der barometrischen Lage des Terrains auf ihren beiden Seiten für denselben sich eignet, §. 10. I.; man könnte die Lage verschiedener Orte auf ihr astronomisch bestimmen, und so aus dem bekannten Abstand dieser Orte den Halbmesser der Sphäre finden, welcher das Land osculiret.

Uebrigens wird eine solche Linie nicht auf einmal, sondern nach und nach, oder theilweise abgesteckt; es verlängert sie der Geograph, wenn er an dem bisher Abgesteckten alles aufgenommen hat, was ihr zur Rechten und Linken von einer Gränze des Staats zur andern lieget.

Er nimmt so den Staat nach ihr partienweise auf, und entübriget sich dabey der Fehler, welche bey einer auf einmal abgesteckten Richtungslinie, durch das Senken, oder auch Verwerfen der Signalstangen, durch den Einfluß der Witterung entstehen könnten.

Um ferner die Dreyeckpuncte aufs sicherste aufzutragen, berechnet man für sie ihre Coordinaten; indem man die Diagonale selbst für die Abscissenaxe, und die auf sie aus den Spitzen der auf ihren beiden Seiten sich anschließenden Dreyecke fallenden Perpendikel für die ihnen entsprechende Ordinaten ansiehet.

Kann der Geograph noch eine Diagonale durch Puncte ziehen, die aus der ersten bestimmt worden sind, so erwähret

währet sich durch diese die Lage aller übrigen bestimmten ihr nahe fallenden Puncte, und er kann sich dieser Diagonale, wie der ersten, weiters bedienen.

Können mehrere Diagonalen durch den Staat abgesteckt werden, die sich erst in weiter Entfernung außer seinen Gränzen durchschneiden würden, so ergeben sich zwischen jedem Paar derselben eigene Campi, deren jeder für sich nach seinem Detail aufgenommen werden muß.

Aufnahme eines Landes nach der Parallelmethode.

III. Wenn bey der Triangularmethode über dem aufzunehmenden Lande ein trigonometrisches Netz verbreitet wird, dessen Knoten die Objecte abgeben, welche dasselbe constituiren, so wird statt dessen nach der Parallelmethode über das aufzunehmende Land ein Netz verbreitet, das in lauter Rhomben oder auch Rectanguln zerfällt, die nachgehends unmittelbar mit der Kette gemessen werden.

Es ziehet zu dem Ende der Geograph aus einem gegebenen Punct oder Standort A Fig. 35., durch den Staat eine Directionslinie (II.) NM, nach einer gewissen Richtung; er mißt dieselbe mit der Kette durchaus aufs genaueste, und fället auf diese in gewissen Distanzen AB„ AC„... senkrechte Linien oder Perpendiculären OAG„ VCI..., die nachgehends durch den Staat abgesteckt und gemessen werden.

Eben so stecket der Geograph zu beiden Seiten der Directrice mehrere Parallelen FD„ GI„ MK„ OV ab, die durch den ganzen Staat fortlaufen und gemessen werden; so daß auf diese Art der Staat in lauter rechtwinklichte Sectionen ABFE„ FGEH„... zerfällt, deren Detail nachgehends durch die an den Umfangsseiten der Sectionen aufgenommene Winkel, oder sonst polygonometrisch §. 7. gemessen wird.

Da-

Dabey sind nun die Abstände AF„ FG„ MA„ MO„ der Parallelen unter sich gleich, oder ihre Abstände richten sich hauptsächlich nach dem Terrain, wornach dort eine Parallele abgesteckt wird, wo sie sich am füglichsten ziehen lässet.

Eben so verhält sichs auch mit den Abständen der Perpendiculären AB„ BC„, durch deren Kettenmaaß die Parallelen selbst bestimmt werden. Ist z. E. der Abstand AF einer Parallele FD von der Directrice zu 6000 Meter bestimmt worden, so mißt man aus jedem Distanzpunct A„ B„ C derselben, auf der Parallele 6000 Meter fort, stecket dort ein Signal in F„ E„ D. und traciret zwischen F und E, zwischen E und D, die geraden Linien FE und ED.

Fällt in die Section AMLB ein Object, das von M und L oder auch von U aus, gesehen werden kann, so bestimmet man dieses durch das Vorwärtsabschneiden, aus der Basis und den ihr anliegenden Winkeln; man bestimmt eben so das Object durch die übrigen Seiten seiner Section, wo dieses von solchen aus gesehen werden kann; und nimmt nachgehends das Mittel aus sämmtlichen Bestimmungen für seine Definitive.

Befindet sich in (d) ein Ort, der von den Umfangsseiten seiner Section FGEH nicht gesehen werden kann, so bestimmt man denselben durch Traversen, von dem Punct (a) aus, von welchem man nach ihm am füglichsten kommen kann; und mißt so die Traversen ab„ bc„ ad„ mit ihren anliegenden Winkeln. §. 7.

Sind auf diese Art in einer Section mehrere Puncte bestimmt, so kann dieselbe nach ihrem Detail aufgenommen und ausgearbeitet werden.

Sonach richten sich die Abstände der abzusteckenden Parallelen ganz nach dem Locale ihres Terrains; und eben so auch der Winkel, unter welchem die einen Diagonalen

nalen die andern durchschneiden: es bilden sich bey dieser Messungsmethode lauter Quadrangula, die in eigentliche Rectangula oder Rhomben übergehen, wenn die Winkel, unter welchen sich die Parallelen schneiden, unter sich gleich sind.

Diese von Hrn. Bugge auf der Insel Seeland im Großen ausgeführte Parallelmethode hat große Vorzüge vor andern, neben mancherley Inconvenienzien, die von ihr unzertrennlich sind.

Sie gewähret nemlich den großen Vortheil, daß sich ihr Netz, nicht wie ein triangulares verschieben kann; und die in jeder Section bestimmte Puncte sind von den Puncten der übrigen Section isolirt, oder ganz unabhängig; und mehrere können nach Umständen aus den Umfangsseiten ihrer Section mehrmalen bestimmt werden.

Sie entübriget außerdem den Staat der Anschaffung kostbarer Instrumente, da sie einzig nur durch den Meßtisch, der Kette und Absteckstangen ausgeführt wird. Man giebt dabey gewöhnlich einer Section die Größe des Meßtisches selbst; so daß sonach das aufgenommene Land in so viel Blätter zerfällt, als Sectionen für dasselbe beliebt wurden, nach dem Maaßstab, welcher dabey zum Grunde gelegt wird.

Bey der K. Dänischen Landesvermessung war der Maaßstab zu 1000 Ellen, einen Dänischen Decimalzoll; und da das auf den Tisch gespannte Papier innerhalb seines Randes 10 solcher Zolle hatte, so wurden die Abstände der Parallelen und Perpendicularen zu 10000 Ellen abgesteckt.

Neben diesen Vorzügen hat aber diese Methode einmal das Eigene, daß sie sich nur in einem ebenen, von Moosen, Morästen, Seen und Bergen nicht durchschnittenem Lande, dessen wenige Waldungen außerdem nicht geschont werden dürfen, am füglichsten ausführen läßt; weil

weil sämmtliche Parallelen und Perpendikulären mit der Kette unmittelbar gemessen werden müssen; sie ist außerdem um so aufhaltsamer und kostbarer, je mehr nach der Länge der Linien, nach den Schwierigkeiten ihrer Absteckung und Aufmessung durch Waldungen, Zeit und Arbeiten auf- und angewandt werden müssen.

Da ferner selbst auf dem ebenen festen Boden, die Messung mit der Kette auf 1000 Fuß Länge, nur eine Zuverlässigkeit von $\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{2}$ Fuß, auch bey Anwendung alles Fleißes und Sorgfalt gewähret, und die sogenannte Staffelmessung noch unzuverlässiger, und um so unsicherer ist, je mehr der Boden abhänget, so wird auch von dieser Seite die Messung der Parallelen und Perpendikulären um so unzuverlässiger, je länger sie an und für sich sind, je unebener ihr Terrain, je hinderlicher in Waldungen die in den Fluchtlinien zurückgelassenen Stubben der abgehauten Bäume der Linienmessung sind; je weicher da und dort der Torf oder Moorgrund ist, und je öfter die Staffelmessung eintreten muß, und je unsicherer sie an steilen Hängen an und für sich ist.

Wenn daher auch von dem Geographen der Antrag für die gleiche quadratische Größe der Sectionen gemacht ist, so kann nichtsdestoweniger die Section LBKC in ihrer Wirklichkeit größer oder kleiner als die Section MALB abgesteckt werden, ja es kann selbst in der nemlichen Section AFBE, die Seite FE wirklich länger oder kürzer als die Seite AB seyn, je nachdem das Terrain für die Messung in beiden beschaffen ist.

Ist z. E. jede Seite der Section 20000 Fuße, und das Terrain von A nach B ganz offen und eben, von F nach E aber hügelicht, mit Gräben durchschnitten und mit Bäumen besetzt, so können die 20000 Fuße von A nach B sicherer, als von F nach E gemessen, und so die Linie FE größer oder kleiner als die AB abgesteckt werden.

Wenn

Wenn daher aus den Puncten A„B ein Object Z auf dem Meßtisch bestimmt wird, und man bestimmt dasselbe auch aus der Linie FE, so muß der Punct für dasselbe auf dem Meßtisch nach der einen und der andern Bestimmung eine um so abweichendere Lage erhalten, je mehr die wirklichen Abstände der Puncte B und C von A und F von einander verschieden sind.

Unter solchen Umständen sind sich daher die wirklich abgesteckten Sectionen und die auf dem Meßtisch abgesteckten Sectionen, nicht immer ähnlich; erstere können Rhomboidalen oder verschobene Quadrate seyn, wenn letztere wirkliche Quadrate sind.

Außerdem sind die auf dem Papier aufgezeichnete Sectionen immer den Veränderungen unterworfen, welche eine veränderliche Wärme, und insbesondere der Feuchtigkeitszustand der Luft mit sich bringt; sie wachsen mit zunehmender Feuchte, und ziehen sich mit der Trockniß wieder zusammen; es wird die Section selbst in ihrer Form etwas verschoben, wenn das Papier sich auf der einen Seite anders als auf der entgegengesetzten Seite sich gleichzeitig ändert. Ein Punct Z, der durch die Seite AB bey trockner Luft bestimmt wurde, erhält daher auch eine andere Lage, wenn er durch die Seite EF bey nasser Witterung abgeschnitten wird; wenn auch die Seiten AB„FE in ihrer Wirklichkeit sich ganz gleich wären. §. 8. III.

Die Peripherialaufnahme.

IV. Wenn der Geodät eine Gemeinflur geodätisch aufnimmt, bleibt es für ihn erste Maxime, ein Polygon durch ihre Gränzen abzustecken, das bey einer schicklichen Form, die wenigsten Umfangsseiten hat.

Diese Form ergiebt sich, wenn die Flur in derselben sich in Dreyecke zerfällen lässet, die keine zu spitzigen

und

und keine zu stumpfe Winkel haben, um nach denselben die Dreyecke selbst mit möglichster Zuverlässigkeit berechnen zu können, §. 8. I.; es ist diese Form die einfachste und schicklichste, wenn der Geograph in das Land, oder auch um dasselbe ein Dreyeck beschreiben kann, das in seiner Art ein größtes, und dabey möglichst gleichseitig ist: oder auch, wenn er dasselbe in ein Viereck bringen kann, das in zwey solche Dreyecke zerfällt.

Als ich das Gebiet der ehemaligen Reichsstadt Nürnberg trigonometrisch aufnahm, brachte ich dasselbe in ein Viereck, dessen Eckpuncte Hohenstein-Guttenburg, der Thurm auf der Feste Nürnberg, und das Signal auf dem Dillberg waren.

Hat sich nun nach dem Recognosciren ergeben, daß das aufzunehmende Land sich in ein Viereck ABCD in Fig. (36.) einschließen lasse, bey welchem alle Winkel, zugleich mit dem Diagonalwinkel gemessen werden können, so kommt dem Geographen alles darauf an, eine der Umfangsseiten des Vierecks zu bestimmen, um aus dieser auch die andern Seiten zu finden.

Nun kann aber eine der Seiten durch eine gemessene Grundlinie, und durch eine an diese sich anschließende Dreyeckreihe trigonometrisch berechnet werden; man kann statt dessen auch eine Seite durch Traversen polygonometrisch bestimmen, §. 7. I., wo das Terrain so beschaffen ist, daß diese Bestimmung mehr Genauigkeit, als die trigonometrische gewähret: am füglichsten aber findet man eine der Umfangsseiten des Vierecks, wenn der Punct (E), in welchem sich die Diagonalen des Vielecks durchkreuzen, seines Orts so fällt, daß an seiner Stelle eine Winkelaufnahme schicklich Statt finden kann.

Denn in diesem Fall zerfällt das Viereck des Landes in vier Hauptsectionen oder Dreyecke, DEC „ CEB „ EAB „ DAE; von welchen man leicht eine Seite bestimmen kann,

die

die sich unter den übrigen am zuverlässigsten ergiebt; um aus dieser alle übrigen zu finden.

Sollten sich zwey Seiten mit hinlänglicher Genauigkeit bestimmen lassen, so könnte man durch jede derselben, die Dreyecke des Vierecks nach (I. 3.) interpoliren, und so das ganze Viereck selbst verificiren.

Ist dieses gehörig vollbracht, so nimmt der Geograph durch jede der 8 Seiten so viele Secondär-Dreyecke auf, als sich an sie anschließen lassen; er gewinnt dabey den Vortheil, daß er den nemlichen Ort von verschiedenen Seiten her bestimmen kann; und kann deswegen seine Lage nach (I. 3.) interpoliren: er nimmt am Ende solche Sectionen, die sich nicht trianguliren lassen, nach (I. 5. 6.) polygonometrisch auf; und orientiret am Ende sein Dreyecknetz nach den Weltgegenden; und berechnet nach denselben die Coordinaten seiner bestimmten Puncte nach (I.).

Trigonometrische Bestimmung der geographischen Lage der Orte eines kleinen Staates.

V. Will der Trigonometer die geographische Breite und Länge gewisser Orte des aufgenommenen Staates, aus den für sie berechneten Coordinaten (I. 2.) bestimmen, so muß er vorerst die geographische Breite und Länge des Orts bestimmen, auf dessen Meridian er jene Coordinaten fundiret hatte; und es ist nun für die Berechnung der geographischen Lage der übrigen der nächste Weg folgender.

a. Es sey die geographische Breite jenes Ortes C gleich (α); sein senkrechter Abstand von dem Aequator in seinem Meridian auf der ellipsoidischen Erde $= \delta$; die Excentricität des Erdellipsoids $= \varepsilon$; und das Axenverhältniß derselben $1 : \mu$. bey dem Halbmesser $= a$ des Aequators.

Nun

Nun ist aber nach §. 2. VII.

$$\delta = a.(1-\varepsilon^2).= m\alpha - \tfrac{1}{2}n.\mathrm{Sin}\,2\alpha + \tfrac{1}{4}p.\mathrm{Sin}\,4\alpha - \tfrac{1}{5}q.\mathrm{Sin}\,6\alpha + ..$$

Aendert sich ferner ein Winkel φ um die endliche Differenz $\Delta\varphi$, so ist die endliche Differenz seines Sinus, oder $\Delta.\mathrm{Sin}\,\varphi = \mathrm{Sin}(\varphi+\Delta\varphi) - \mathrm{Sin}\,\varphi$; oder

$$\Delta.\mathrm{Sin}\,\varphi = (\mathrm{Cos}\,\Delta\varphi - 1)\,\mathrm{Sin}\,\varphi + \mathrm{Sin}\,\Delta\varphi.\mathrm{Cos}\,\varphi.$$

Ist $\varphi = 2\alpha$ in der Reihe, so ist auch ihre endliche Differenz

$$\frac{\Delta\delta}{a.(1-\varepsilon^2)} = m\Delta\alpha - \tfrac{1}{2}n.((\mathrm{Cos}\,2.\Delta\alpha - 1)\mathrm{Sin}\,2\alpha + \mathrm{Sin}\,2\Delta\alpha.\mathrm{Cos}\,2\alpha))$$
$$+ \tfrac{1}{4}p.((\mathrm{Cos}\,4.\Delta\alpha - 1)\mathrm{Sin}\,4\alpha + \mathrm{Sin}\,4\Delta\alpha.\mathrm{Cos}\,4\alpha)).$$

Ist nun die Abscisse $\Delta\delta$ so klein, daß man diesen Bogen ohne auffallenden Fehler mit seinen Sinus selbst verwechseln kann, so ist auch $\mathrm{Cos}\,2\Delta\alpha - 1 = 0$ beinahe; mithin

$$\frac{\Delta\delta}{a.(1-\varepsilon^2)} = m\Delta\alpha - \tfrac{1}{2}n.2\Delta\alpha.\mathrm{Cos}\,\alpha;$$ oder in Secunden;

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta\delta.206265.}{a.(1-\varepsilon^2).(m - n\,\mathrm{Cos}\,2\alpha)}.$$

Es sey z. E. die Polhöhe des Ortes C zu $48°\,''\,24'\,''\,36''$ beobachtet, und die nördliche Abscisse eines Ortes zu 13910, die ihr correspondirende westliche Ordinate aber zu 14916. Metern berechnet worden.

Nun nehme ferner der Trigonometer bey der Berechnung der geogr. Lage der Orte jenes kleinen Staates das Axenverhältniß 334 : 333 für das Erdellipsoid zum Grunde, bey einem Halbmesser ihres Aequators von 68045305. Metern.

Hier ist also

$$\mu = \frac{333}{334};\quad 1-\mu^2 = 1-\left(\frac{333}{334}\right)^2 = 0{,}005979058 = \varepsilon^2;$$

und $\log \varepsilon^2 = 0{,}7766329-3$; $\log a = 6{,}8045305\,08$;

$\log \mu^2 = \log\, 1-\varepsilon^2 = 4{,}9973954-5$;

und $\alpha = 48°\,''\,24'\,''\,36''$; $\Delta\delta = 13910$. Meter.

Es

Es ist ferner in §. 2. VII. $m = 1 + \frac{3}{4}\varepsilon^2 + \frac{45}{64}\varepsilon^4$
$= 1{,}00450961 \,.\, a = \frac{3}{4}\varepsilon^2 + \frac{15}{16} \,.\, \varepsilon^4 = 0{,}00451781$;
$\text{Cos } 2\alpha = \text{Cos } 96''\,49'\,12'' = -\text{Sin } 6°\,49'\,12''$; und

$\log n = 4{,}6549270 - 7.$
$\text{l. Cos } 2\alpha = 9{,}0745122 - 10.$

$4{,}7294892 - 8.$
Absolutzahl $= 0{,}00053633.$
$m = 1{,}00450961.$

$1{,}00504594.$

	$\log \Delta\delta = 4{,}1433271.$
	$\log 206265 = 5{,}3144252.$
	$9{,}4577523.$
$\log 1{,}00504\ldots = 8{,}0021859 - 8.$	
$\log 1 - \varepsilon^2 = 4{,}9973954 - 5.$	
$\log a = 6{,}8046305.$	
$6{,}8041118.$	$6{,}8041118.$
	$\log \Delta\alpha = 2{,}6536405.$

$\Delta\alpha = 45045.$ Secunden.

Die geographische Breite des Ortes wäre also

$48°\,32'\,6''{,}35 = \alpha + \Delta\alpha.$

b. Was ferner die geographische Längen-Differenz dieses Ortes von dem Meridian des Ortes C anbelangt, so ist einmal die derselben entsprechende Bogen-Ordinate von $14916 = p$. Metern.

Ferner ist nach §. 2. I. der Halbmesser des Parallels, in welchem diese Ordinate liegt, gleich

$$\frac{a \,.\, \text{Cos}(\alpha + \Delta\alpha)}{\sqrt{(1 - \varepsilon^2 \,.\, \text{Sin}^2 \,.\, (\alpha + \Delta\alpha)}};$$

mithin sein Umfang selbst

$2\pi\, a \,.\, \text{Cos}(\alpha + \Delta\alpha) : \sqrt{(1 - \varepsilon^2 \text{Sin}^2 \,.\, (\alpha + \Delta\alpha))}.$

Setzt man die Längen-Differenz $= \Delta L$; so ist deswegen in Secunden

$$\Delta L = \frac{180 \,.\, 60^2 \,.\, p \,.\, \sqrt{(1 - \varepsilon^2 \,.\, \text{Sin}^2 \,.\, (\alpha + \Delta\alpha))}}{\pi \,.\, a \,.\, \text{Cos}(\alpha + \Delta\alpha)}.$$

Für

Für den Ort in (a) ist die Rechnung folgende:

$\log \varepsilon^2 = 0{,}7766329 - 3.$

$\log.\mathrm{Sin}^2.(\alpha+\Delta\alpha) = 19{,}9932680 - 20.$

$4{,}7699009 - 7.$

0.0058871

1

0,9941129.

$5{,}9974357 - 6$

$4{,}9947178 - 5. = \log\sqrt{(1-\varepsilon^2.\mathrm{Sin}^2(\alpha+\Delta\alpha))}.$

$4{,}9987178 - 6.$	$\log \pi = 0{,}4971498.$
$\mathrm{l}.180.60^2 = 5{,}8115750.$	$\log a = 6{,}8045305.$
$\log p = 4{,}1736524.$	$\mathrm{l}.\mathrm{Cos}(\alpha+\Delta\alpha) = 9{,}8209645 - 10.$
$9{,}9839452.$	$7{,}1226848.$

9,9839452

7,1226848

$\log \Delta L = 4{,}8612604 - 2.$

$\Delta L = 726{,}54.$

Die Längen-Differenz dieses Ortes und dem Orte C würde also 12′„6″,54 seyn.

Uebrigens wird die Special-Charte eines so kleinen Staates, oder die Amts-Charte eines großen Staates nach einem Maaßstab aufgetragen, der sich nach der Größe des Papiers richtet, auf welche dieselbe gezeichnet werden soll.

Hierüber, und insbesondere über das Aufreissen des Netzes der Charte, werde ich in der Folge die nothwendigen Betrachtungen anstellen.

§. 12.

Aufnahme eines Staates durch geradlinichte Dreyecke.

Wo der Staat größer ist, als daß er nach den in §. 11. angeführten Messungsmaximen aufgenommen werden könnte, pflegte man seither auch denselben nach der Triangularmethode §. 4. II. aufzunehmen, indem man mehrere geradlinichte Dreyecke über ihm in stetiger Continuität anreihete, deren Conflict das geradlinichte Triangularnetz des Staates constituirte.

Man orientirte dieses Netz durch ein an einem schicklichen Orte genommenes Azymuth, und berechnete nach demselben die Coordinaten aller Eckpuncte dieses Netzes, §. 11. I. 6., für die Construction seiner Charte, indem man dabey an einer oder mehrern, aufs sorgfältigste mit Meßstangen gemessenen, und auf den Seehorizont reducirten Grundlinien ausgieng. §. 10.

Nun mißt man aber bey einer solchen Aufnahme eines Staates, statt der eigentlichen Bogendistanzen seiner Orte, immer die Tangenten ihres Centerwinkels, und fehlet daher immer in jeder solcher Bestimmung um den Ueberschuß jener Tangente, über den ihr zukömmlichen Bogen: man bestimmt ferner die Tangenten selbst um so fehlerhafter, je öfter man Dreyecke wählt, deren sphärischer Exceß nach der Länge ihrer Seiten nicht mehr verschwindend ist. §. 2. X.

Immer muß sich daher das Triangularnetz des Staates bey einer solchen Aufnahme aus Dreyecken construiren, die nach ihrer Größe keinen merklichen Exceß haben können; man muß deswegen um so mehrere solcher kleinen Dreyecke an einander reihen, je größer der aufzunehmende Staat ist; und die Folgen der bey Bestimmung der Seiten solcher Dreyecke unvermeidlichen Fehler, §. 8.,

kön-

können sich daher mit ihrer Anreihung eben sowohl anhäufen, als sie sich wechselseitig gegen einander zum Theil aufheben können.

Immer stehet daher diese Aufnahme des Staats seiner sphärischen Aufnahme nach; weil man bey dieser die Dreyecke so groß nehmen kann, als sie sich nach dem Terrain, mit Rücksicht auf die in § 3. IV. angeführte Umstände ergeben können; und weil man außerdem nach der letztern die Bogendistanzen der Orte des Staats unmittelbar selbst findet.

Abstand der gemessenen Tangenten, von ihren entsprechenden Bogen.

I. Um nun den Unterschied der ebenen Triangularmessung von der sphärischen zu beurtheilen, denke ich mir die Abscisse und Ordinate eines gegebenen Orts im Staate, von welchen erstere in dem mittlern Meridian des Landes lieget, letztere aber diesen rechtwinklicht durchschneidet, in einem Puncte, welchen der Geograph für den Anfangspunct der Abscissen seines Dreyecknetzes nach Umständen angenommen hat.

Auch sey in Fig. (37. Tab. III.) PAQ der mittlere durch beide Pole P„Q gehende Meridian des Landes, und ADF ein durch den Anfangspunct A der Abscissen seines trigonometrischen Netzes gehender Parallelkreis des Landes, welcher den Meridian als solcher allda senkrecht durchschneidet.

Auch sey Aa eine nördliche Abscisse eines Ortes (a) und Ab die westliche Ordinate eines Ortes (b), nach dem Coordinatenverzeichniß.

Berühret nun ein geradlinichter Kegel AEF, dessen Axe in die Verlängerung der Erdaxe PQ trift, das Land in dem Parallel ADF, so ist dieser dem Kegel und dem Ellipsoid der Erde gemeinschaftlich, und sämmtliche Abscissen

scissen des Landes liegen in der Ebene dieses Kegels unmittelbar selbst, als Tangenten seines mittlern Meridians, statt dessen die auf den Meridian senkrechte Ordinate Ab, des Ortes (b), als Tangente des Kreises ADF für den Halbmesser AE, um Db von diesem Kreise abweichet, in einer Ebene, die man durch die Tangente Ab und den Mittelpunct E des Kegels legt.

Denke ich mir nun das aufgenommene Land, als ein Stück des Kegels AEF, welcher dasselbe in seinem mittlern Parallel berühret, so liegen zwar die Abscissen aller Puncte seiner Dreyecke in der Ebene des Kegels selbst, während dagegen die Ordinaten dieser Puncte als Tangenten um so mehr von ihren Kreisen abweichen, je länger sie sind.

Diesen Abstand der Tangenten von ihren Kreisen für jene Kegel zu berechnen, setze ich den Halbmesser des Aequators des Erdellipsoids $= a$; die Excentricität der Erde $= \varepsilon$; die geographische Breite seines mittlern Parallels ADF gleich (α); $Ao = x$; den Bogen $Am = \sigma$; so ist nach Fig. 1. $\mathrm{Sin}\, q\mu M : qM = 1 : M\mu$; oder

$$\mathrm{Sin}\, x : -dx = 1 : d\sigma;\quad d\sigma = -\frac{dx}{\mathrm{Sin}\, x}.$$

Ferner ist nach der Aehnlichkeit der Dreyecke $AE = \frac{x\, d\sigma}{dx}$; mithin ist der Halbmesser des mittlern Parallels des Landes auf dem Ellipsoid oder

$$AE = \frac{x.}{\mathrm{Sin}\,\alpha} = \frac{a'.\mathrm{Cos}\,\alpha}{\mathrm{Sin}\,\alpha.\sqrt{(1-\varepsilon^2.\mathrm{Sin}\,\alpha^2)}} = \frac{a'.\mathrm{Cotang}\,\alpha}{\sqrt{(1-\varepsilon^2.\mathrm{Sin}\,\alpha^2)}}$$

nach §. 2. I.

Ferner nach geometrischen, in der Folge noch weiters auszuführenden Principien

$$Db = \frac{Ab^2}{2AE+Db};\ \text{oder}\ Db = -AE+\sqrt{(AE^2+Ab^2)};$$

$$Db = AE.\left(-1+\sqrt{1+\left(\frac{Ab}{AE}\right)^2}.\right).$$

Nimmt

Nimmt man hier der Kürze wegen die Erde kugelförmig an; setzt ihren Halbmesser 860 geogr. Meilen, und die geographische Breite des mittlern Parallels des Landes $= 45°$ Grade; so ist des Kegels Halbmesser $AE = 860 . 1 = 860$ geogr. Meilen.

Wäre nun die Ordinate $Ab = 10$ Meilen, so ist $Db = -860 + \sqrt{860^2 + 10^2} = 0{,}06$ Meilen, oder 1500 Fuße, die Meile zu 25000 Fußen gerechnet.

Für diese Distanz würde also die gemessene Tangente von dem ihr entsprechenden Parallelkreis auf der Ebene jenes Kegels um 1500 Fuße wirklich abweichen.

Berechnet man ferner die nemliche Abweichung für die Charte des Landes, so wird sie um so kleiner seyn, je kleiner ihr Maaßstab an und für sich ist.

Soll nemlich die Charte des Landes nach einem Maaßstab gezeichnet werden, bey welchem 50000 Fuße gerade einen Fuß für die Charte geben, so würde die Ordinate Ab von dem Parallelkreis ihres Kegelnetzes nur $\frac{1500}{50000}$ oder $\frac{1}{33}$ Fuß abweichen; wenn man die Meile nach einer runden Zahl zu 25000 Fußen ansetzen wollte.

Hätte statt dessen das Land nach Westen eine Ordinate von 215 Meilen, so würde auf diese große Distanz ihre Abweichung von dem Kegel 26,488 Meilen oder 13,24 Charten-Fuße betragen.

Daraus ergiebt sich für ein Land, dessen Quadratseite höchstens 60 Meilen mißt, daß nach diesem Maaßstab das Netz seiner Charte immer noch durch geradlinichte rechtwinklichte Coordinaten, ohne merklichen Fehler aufgetragen werden könne.

Differenz des Bogens von seiner Tangente.

II. Um ferner auch den Fehler zu überschlagen, welcher daraus entstehet, daß man die Ordinate Ab nach

der

der Tangente des Kreises ADF, und nicht in seinem Bogen selbst aufträgt, so ist einmal tang AEb $= \frac{Ab}{AE} = \frac{\delta}{\varrho}$; und der hieraus entstehende Fehler im Auftragen selbst tang AEb — Bogen AD; oder tang $v - v$.

Nun ist aber

$$v = \text{tang } v - \tfrac{1}{3}\text{tang } v^3 + \tfrac{1}{5}\text{tang } v^5 - \tfrac{1}{7}\text{tang } v^7 + \ldots$$

also jener Fehler im Auftragen

$$\tfrac{1}{3}\text{tang } v^3 - \tfrac{1}{5}\text{tang } v^5 + \tfrac{1}{7}\text{tang } v^7 - .; \text{ oder}$$

$$\frac{\delta^3}{\varrho^2} \cdot \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5}\frac{\delta^2}{\varrho^2} + \tfrac{1}{7}\frac{\delta^5}{\varrho^5} - \tfrac{1}{9}\frac{\delta^7}{\varrho^7}\right) + \ldots..$$

Setzt man für den Parallel von 45 Graden nach (a) den Halbmesser desselben, oder $\varrho = 860$; $\delta = 10$ Meilen; so ist der Fehler

$$\frac{1000}{739600} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{36980}\right) = \frac{36977}{82051044} \cdot \frac{25000}{50000} = \frac{1}{4430}$$

eines Fußes; mithin der Fehler selbst verschwindend klein.

Da nun bey einer solchen Messung keine Dreyecke von dieser Größe vorkommen können, so kommt dieser Unterschied für dieselbe gar nicht in Anschlag; wenn auch die Summe der berechneten Tangental-Coordinaten sich auf einige hundert Meilen belaufen würde.

Der Maaßstab der Charte.

III. Bey der Construction des Netzes der Charte, werden nun sämmtliche Coordinaten desselben nach einem verjüngten Maaßstab aufgetragen, dessen Einheit immer ein gewisses Verhältniß zu dem landüblichen Fuße, oder der sonstigen Einheit hat, nach welcher die Grundlinie des Landes gemessen, oder dasselbe aufgenommen wurde.

Dieser Maaßstab ist nach seiner Construction entweder ein Nonius-Maaßstab, auf welchem die Charten-

Fuße durch Verschiebung einer sogenannten Nonius- oder Vernier-Eintheilung mit dem Stangencirkel abgenommen worden, oder er ist statt dessen auch nur ein gewöhnlicher Transversalmaaßstab, der auf Messing, Kupfer oder Silber, durch feine und tiefe Linien so genau als möglich eingetheilt und eingerissen ist.

Dabey beruhet nun das Verhältniß des Charten-Fußes zum landüblichen Fuß selbst zunächst in dem Zweck der Charte, nach welchem sie eine blos geographische, oder statt dessen eine topographische, oder wohl gar eine Catastral-Charte ist.

a. Bey ersterer genüget es nemlich, wenn die Charte anzeiget sämmtliche Festungen, Städte, Marktflecken, Dörfer, Weiler, Einöden und sonstige Etablissements, unter den für sie eingeführten Zeichen; die nach ihnen führende Chaußeen, Landstraßen mit den Poststationen — ferner seine Ströme und Flüsse, mit ihren Haupt-Brükken — seine Seen, Meere und Brüche; den Zug seiner Gebirge mit den detachirten Bergen, großen Waldungen und Haiden.

Dagegen sind in der topographischen Charte des Landes seine Festungen, Städte, Marktflecken, u. s. w. situationsmäßig, nach den Complexen ihrer Gebäude, wie sie sich nach den Straßen abtheilen, welche sie durchschneiden, verzeichnet; und außer den Chaußeen, Land- oder Heerstraßen, auch die Vicinalwege, Hohlwege nnd Gehsteige von einem Ort zum andern eingetragen.

In einer solchen Charte sind ferner außer den Strömen und Flüssen des Landes auch seine Canäle und Bäche bemerkt, mit den steinernen und hölzernen Brücken, welche über sie führen, mit ihren Wehren, Schleußen, Vorhieben und sonstigen hydrotechnischen Anlagen — die Gebirge des Landes werden in ihr nach ihrem Zug, und die Form und Abweichung der einzelnen Berge gezeichnet;

eben so die einzeln sich erhebenden oder detachirten Berge und Landhöhen. — Man verzeichnet nicht minder in die Charte die Wälder des Landes nach ihren Holzarten, die Brüche, die Seen, Teiche und Weiher, die Haiden, Moore, Sümpfe, und unterscheidet das Ackerland von der Wiesmath; so daß aus der Charte nicht nur der Abstand der Orte von einander abgenommen werden kann, sondern dieselbe auch zugleich die Beschaffenheit desselben und seiner Cultur anzeiget.

Ist die Charte eine militairisch-topographische, so muß sie neben diesem allem noch alles in sich enthalten, was dem Militair interessiret, z. E. die Domainen der Berge und Anhöhen, die Hohlwege und Hinterhalte durch Gebüsche, die Fährden, oder seichten Stellen bey Flüssen, mit der Beschaffenheit der Ufer und Gestade, u.dgl.

Alles dieses enthält nicht nur die Catastral-Charte des Landes, sondern sie geht noch viel weiter in sein Detail, und ist eigentlich das verjüngte Bild der Oberfläche des Landes selbst.

Denn sie enthält seine sämmtlichen bewohnte und unbewohnte Gebäude nach ihren wirklichen Grundrissen, und die Horizontalprojetion seiner urbaren und übrigen Grundstücke innerhalb ihren natürlichen und künstlichen Gränzen, mit ihren Zeichen, wornach sich ergiebt, ob sie Ackerland oder Wiesmath, Brüche, Moore, Waldungen von gegebenen Hölzern sind, u. s. w.

b. Da nun nach einer solchen Charte das Flächenmaaß der einzelnen Grundstücke zum Behufe ihrer Steuerregulirung berechnet wird, so kann der Maaßstab einer solchen Charte nicht wohl kleiner seyn, als daß man das verjüngte Bild des landüblichen Fußes, oder den Charten-Fuß auf ihr noch deutlich sehen, oder unterscheiden kann; weil sonst das Flächenmaaß der Grund-

stücke aus ihr gar zu unsicher sich ergeben könnte. Es ist dieß um so nothwendiger, je kleiner die Grundstücke im Allgemeinen nach der Menge der walzenden Stücke sind, aus welchen sich die Fluren der Gemeinden constituiren, und je mehr sie sich dabey in die Länge ziehen.

Nun ist aber nach §. 3. I. der kleinste Punct, welcher meinem Auge bey eingerissenen Linien sich noch zeiget, so klein, daß er sich in einem Abstand von $\frac{1}{2}$ Fuß unter einem Winkel von 20 Secunden darstellet, wenn auch der Maaßstab die convenabelste Erleuchtung hat: es ist ferner jener Punct, welchen ich unter diesen Umständen noch deutlich unterscheiden kann, gerade 4mal größer, als jener.

Jener Punct ist also $\frac{1}{2}$ tang $20'' = \frac{1}{2} . 0{,}00009696$ $= 0{,}00004848$; und dieser 0,00019392 eines Nürnberger Fußes, oder beinahe $\frac{1}{5000}$ dieses Fußes.

Ich würde daher bey der Aufnahme einer Catasters-Charte einen Maaßstab zum Grunde legen müssen, dessen Charten-Fuß gerade $\frac{1}{5000}$ eines landüblichen Fußes machen; oder 5000 Fuße würden auf der Charte gerade einen Fuß, oder 1000 Charten-Fuße gerade $\frac{1}{5}$ Fuß oder 2 Decimalzolle geben, wenn ich die Grundstücke noch mit erträglicher Genauigkeit sollte berechnen können.

Wirklich ist auch bey der Königl. Baierischen großen Catastral-Charte der Monarchie, der Chartenfuß gerade zu $\frac{1}{5000}$ eines baierischen Fußes festgesetzt.

Nur Städte und Marktflecken werden nachgehends noch nach einem Maaßstab aufgenommen, der nochmal so groß ist; um die Grundfläche der Gebäude, der Hofreuthen und Gärten, bey ihrem gewöhnlich kleinen Flächenmaaß, um so sicherer berechnen zu können.

Dividiret man die längste Abscisse und Ordinate des Landes, durch die Länge von 1000 Charten-Fußen, so ergiebt sich hieraus die Höhe und Breite der Charte selbst nach landüblichen Fußen.

c. Was

c. Was ferner den Maaßstab für die topographische Charte eines Landes anbelangt, so hängt derselbe zunächst vom Detail der Charte ab, in soferne man nach demselben auch kleine Flüsse, Canäle und Teiche in ihrer wahren Breite in die Charte aufnehmen will.

Will man z. E. Bäche, deren mittlere Breite fünf Fuße ist, in die Charte noch aufnehmen, so darf der Maaßstab nicht kleiner seyn, als daß man fünf Fuße auf ihm noch deutlich abnehmen kann: oder fünf Fuße müssen sich auf ihm eben so zeigen, wie ein Fuß auf dem Catastralmaaßstab. Der Maaßstab einer solchen Charte könnte also nicht wohl kleiner seyn, als daß 5.5000 oder 25000 Chartenfuße gerade einen landüblichen Fuß messen: man nimmt ihn nur halb so groß oder rechnet 50000 Chartenfuße für einen Fuß, wo man so kleine Bäche nicht berücksichtiget, oder dieselbe nicht gerade in ihrer wirklichen Normalbreite in die Charte zeichnen will; oder auch wo das aufgenommene Land so groß ist, daß seine topographische Charte zu viel Aufwand machen müßte, wenn sie in Kupfer gestochen werden sollte.

d. Copieret man die topographische Charte des Landes ins Kleine, so ergiebt diese Copie die geographische Charte des Staates, oder das, was man gewöhnlich unter seiner Landcharte verstehet; welche zunächst dazu dienet, das Land innerhalb seiner Gränzen, auf einem einzigen Blatt oder auch auf etlichen Blättern darzustellen.

Bey einer solchen Charte ist nun ihr Maaßstab in nächster Beziehung mit der größten Abscisse und Ordinate des Landes, mit der Größe und Format des Papieres, auf welche sie gezeichnet werden soll, und mit der Anzahl der Blätter oder Sectionen, die man für sie bestimmt.

Es sey z. E. die längste Ordinate des Landes von Osten nach Westen größer als seine längste Abscisse, und wirklich zu 1440000 landüblichen Fußen berechnet worden, und das Papier der Charte mißt in seiner längen Seite, innerhalb der gezogenen Vierung 3 landübliche Fuße, oder 3000 Theile, so treffen bey dieser Charte auf einen landüblichen Fuß $\frac{1440000}{3} = 480000$ Fußen.

Mißt nun die geographische Meile gerade 24000 solcher Fuße, so würde die Meile $\frac{24000}{480000}$ oder $\frac{1}{20}$ Fuß auf der Charte messen.

Da sich aber bey einem so kleinen Maaßstab die Ordinaten und Abscissen nicht scharf genug auftragen lassen, so ist es immer räthlich, dieselbe nach dem landüblichen, in 1000 Theile abgetheilten Fuß aufzutragen.

Soll z. E. eine Abscisse von 90000 Fußen auf die Charte getragen werden, so berechnet man ihre Länge nach jenen Theilen des landüblichen Fußes, nach der Analogie 144000 : 90000 = 3000 : x; x = 187,5. Theile.

Man nimmt daher auf dem Maaßstab für diese Abscisse 187,5 Theile ab, und trägt diese auf die Charte.

Auf diese Art habe ich in meiner Charte von dem ehemaligen Franken nach dem in 1000 Theile abgetheilten Nürnberger Fuße, die nach dem Azymuth von Hohenstein berechneten Abscissen und Ordinaten aufgetragen.

Die Sectionen einer Catastral-Charte.

IV. Denkt man sich die ellipsoidische Horizontalebene eines Landes in lauter Vierecke abgetheilt, die sich aus den Durchschnitten seiner Parallelkreisen mit andern ergeben, die parallel mit seinem mittlern Meridian gezogen sind, so zerfällt das Land in rechtwinklichte Bogen-Sectionen: es können diese für gerad-

linich-

linichte Vierecke gelten, wenn ihre Seiten so klein genommen werden, daß ihre Bögen von ihren Chorden fast gar nicht abweichen: es werden diese Vierecke eigentliche Quadrate, wenn ihre Seiten gleich groß angenommen werden, und ihre Verjüngung auf der Charte constituirt die Sectionen derselben.

Wollte man sich eine Kugel denken, deren Durchmesser zum Durchmesser der Erde das nemliche Verhältniß, wie die Chartensection zu ihrer Section auf der Erde hat; so würde die Charte das Netz eines Polyhedrons vorstellen, das aus jener Kugel sich ergiebt.

Da ferner diese Sectionen in ihrem Detail vorzüglich durch den Meßtisch, oder geodätisch aufgenommen werden, so richtet sich die Größe der Chartensectionen zunächst nach der Größe, welche man dem Tischblatt des Meßtisches nach Umständen geben kann, und dem Spatium oder Streifen, welchen man, um die Quadratseite der Sectionen, für die Festhaltung des Papiers auf dem Tischblatt, lassen will!

Rücksichtlich dessen lehret nun die Erfahrung, daß die Quadratseite einer Section sich nicht wohl über 2 Fuß belaufen dürfe, wenn der Geodät den Meßtisch noch gehörig manipuliren, oder mit seinen Armen und Augen die Puncte in der Mitte des Tisches noch bequem erreichen, und dieselbe aufs deutlichste sehen soll.

Bey der Königl. Baierischen Catastral-Vermessung ist daher die Quadratseite einer Section nur $1\frac{3}{5}$ Fuß, welche im großen $\frac{8}{5}$. 5000 oder 8000 Fuße machen; und es enthält deswegen eine solche Section oder Blatt, 8000^2 oder 64000000 Baierische Quadrat-Fuße, oder 1600 Baierische Morgen a. 40000 Quadrat-Fuße.

Indem nun auf diese Blätter die berechneten Coordinaten aufgetragen werden müssen, so ist es nothwendig, daß dieselbe sämmtlich aus der nemlichen Papier-

masse

masse bestehen, und von gleicher Stärke bey einerley Pressung sind.

Auch muß für die Quadratseiten ihrer Sectionen ein Etalon gefertiget werden, der aufs genaueste ein Quadrat von gegebener Größe giebt, und in derselben auf die Bogen bey gewisser Temperatur und Feuchtigkeitszustand der Luft aufgedrückt wird.

Bey der Königl. Steuer-Cataster-Commission besteht dieser Etalon aus einer viereckichten eisernen Rahme, in welcher stählerne Spitzen durch Schrauben eine feste Stellung erhalten, wornach jede Spitze von der andern 8000 Fuße des 5000theiligen Maaßstabs von der andern absteht.

Dieser Etalons wird auf das auf das Tischblatt des Meßtisches gespannte Papier nach einem rechtwinklichten Kopflineal aufgelegt, wobey seine Spitzen die Endpuncte in das Papier eindrücken, die nachgehends durch gerade Linien verbunden werden. Die Platten aller für die Commission arbeitenden Geodäten haben daher sämmtlich einerley Normal-Maaß.

a. Auf diese Blätter trägt nun der dirigirende Geograph, oder ein anderer ihm untergeordneter Trigonometer, die von diesem berechnete Coordinaten für die Primär- und Secondär-Dreyecke nach dem Maaßstab der Charte, mit Stangencirkeln auf.

Von diesen sind jene, welche 1000„2000„ Fuße u. s. w. überspannen, für immer fest gestellt, und nur die eine Hülse jenes ist beweglich, der für das Auftragen der Distanzen zwischen n. 1000 und (n+1) 1000 bestimmt ist.

Bey diesem Auftragen wird nun jener Meridian zum Grunde gelegt, welchen der Geograph für den ersten des Landes nach bestehenden Umständen annehmen konnte; und es gilt auf demselben jener Ort für

den

den (o) Punct oder Anfangspunct der Abscissen, welchen der Geograph nach Umständen hiezu wählen konnte.

Für die Königl. Baierische Catastral-Charte ist der erste Meridian durch den nördlichen L. Frauenthurm in München gezogen; und dieser ist auch zugleich der Anfangspunct der nördlichen und südlichen Abscissen der ganzen Monarchie.

Dieser Anfangspunct der Abscissen wird nun gewöhnlich in die Mitte der Meridianlinie, welche die erste Section bisectirt, aufs feinste eingestochen; er stehet daher von jeder Umfangsseite ihres Quadrats um $\frac{1}{2}$ n.1000 Charten-Fuße senkrecht ab, wenn jede solche Seite n.1000 Charten-Fuße mißt.

Will nun der Geograph eine nördliche Abscisse von 85640 und eine Ordinate von 75375 Charten-Fußen für eines seiner Primärdreyecke auftragen, so suchet er zuvörderst die Anzahl der Blätter, die zwischen das erste und jenes hinein fallen, auf welches der Punct gezeichnet werden soll.

Sind diese (x), so ist $\frac{1}{2}$ n.1000 + x.n.1000 = 85640;

$$x = \frac{85640 - \frac{1}{2}\,n.1000}{n.1000}.$$

Wäre n = 8 oder die Quadratseite 8000 Fuße, so ist hier $x = \frac{81640}{8000} = 10$; das ist: der verlangte Punct fällt auf das 1 + 10 + 1 oder 12te nördliche Blatt.

Es sticht daher der Geograph auf der westlichen und östlichen Quadratseite eines aufgezogenen Blatts aus seinem Eckpunct 1640 Charten-Fuße ab, ziehet durch diese Puncte eine gerade Linie, für die jener Abscisse entsprechende Ordinate.

Für die Ordinate ist ferner $x = \frac{75325 - 4000}{8000} = 8$; oder der Punct fällt auf das 10te Blatt nach Osten; und

der

der Geograph trägt deswegen auf die gezogene Linie die überschüssigen 71325—64000 oder die 7325 Charten-Fuße mit dem Stangencirkel dergestalt auf, daß er von der gegenüber stehenden Quadratseite auf der gezogenen Ordinatenlinie 8000—7325 oder 675 Fuße zurücksticht.

b. Solcher durch ihre Coordinaten bestimmter Puncte, müssen nun auf jedem Tischblatt wenigstens zwey seyn; damit der Geodät, welcher das Detail des Blatts aufzunehmen hat, seinen Meßtisch nach denselben in die gehörige Lage richten, oder ihn orientiren kann: es fördert seine Arbeit um so mehr, und diese fällt um so zuverlässiger aus, je mehr bestimmte Puncte er auf seinem Blatt vor sich findet.

Deswegen theilen auch die Geometer, welchen die trigonometrische Aufnahme der Secondärdreyecke zunächst anvertraut ist, ihr Brouillon, das sie von diesen entwerfen, in die Sectionen ab, welche für das Land durch den Geographen oder auch durch seine ihm vorgesetzte Stelle angeordnet und etablirt sind; damit sie sich überzeugen können, ob sie für den ihnen nachfolgenden Geodäten genüglich Puncte in jeder Section bereits bestimmt haben, oder noch mehrere bestimmen, und deswegen Signale setzen müssen.

Auf diese bestimmten Puncte, welche der Geodät auf dem Blatt mit ihren Namen vorfindet, deren Detail er aufnehmen soll, fundiret nemlich derselbe alle seine geodätischen Arbeiten; er arbeitet sie um so geschwinder, und um so sicherer, je mehr er auf seinem Tischblatt bereits bestimmte Puncte vorfindet.

Hat nemlich der Geodät das Tischblatt der Section erhalten, deren Detail er geodätisch aufnehmen soll, so kommt ihm bey seiner Ankunft in derselben zunächst alles darauf an, die Quadratseiten dieser Section zu realisiren, oder auf dem Terrain wirklich mit Absteck-

oder Fluchtstangen abzustecken; er schläget deswegen alle und jede Maximen ein, die ihm dieß Abstecken möglichst erleichtern, und sicher machen mögen.

Diese Maximen aber gründen sich zunächst darauf, daß er an jeder Umfangsseite des großen Vierecks gewisse feste Puncte bestimmet, aus welchen er auf dem nächsten Wege die Stellen bestimmen kann, in welchen die Fluchtstangen für jede Quadratseite seiner Section aufgestellt werden müssen.

Diese feste Puncte aber ergeben sich zunächst durch das Vor- und Rückwärtsabschneiden und den ihm auf der Platte durch ihre Coordinaten bereits gegebenen fixen oder Anhaltpuncten (a); oder auch durch andere Puncte, die er aus diesen bereits auf der Platte bestimmt hat.

Rücksichtlich dessen suchet nun der Geodät auf seinem Terrain die höchsten Berge, Landhöhen und sonstige Plätze aus, von welchen er eine freie Aussicht nach den Orten und Signalen hat, welche die auf seiner Platte bestimmten Puncte vorstellen, und stellet allda Signale der dritten oder vierten Classe §. 4. IV. auf: er sucht eben so jene Stellen aus, an welchen er mehrere bestimmte Puncte und überhaupt das Detail der Flur auf einmal übersehen kann; um jene durch das Vorwärtsabschneiden, letztere aber durch das Rückwärtsabschneiden auf dem Tischblatt zu projiciren; er bedienet sich nur in solchen Fällen der Meßkette, wo ihn diese Messungsmethoden verlassen, oder diese nicht angewandt werden können.

Es seyen z. E. $A_{,,} B_{,,} C_{,,} D$ Puncte, welche dem Geodät auf seinem Tischblatt als durch ihre Coordinaten bestimmte (a) gegeben sind. Fig. 38. Tab. III.

Für diese Puncte suchet nun zuvörderst der Geodät die Stelle E auf dem Terrain auf, in welcher sich die Puncte A und D, so wie B und C in gerader Richtung zeigen; er stellet nun, wo dieses angehet, seinen Meßtisch

in

in E auf, drehet allda denselben so lange, bis sich ihm A„D in dem Visierlineal oder auch in der dioptrischen Regel in gerader Linie zeigen, und ziehet an der Face der Regel eine Linie nach denselben mit dem Silberstift aus: er nimmt nachgehends auch die Vision nach B„C, ziehet eine gerade Linie nach denselben auf dem Tischblatt, bemerket den Punct E, in welchem die letztere Linie die erstere durchschneidet, und erhält in diesem Punct durch dieses Rückwärtsabschneiden, die Projection der Stelle E auf seiner Platte.

Eben so findet er auch durch das Rückwärtsabschneiden die Projection einer Stelle F, in welcher sich ihm A„B von der einen, und D„C von der andern Seite in geraden Linien zeigen.

Diese Puncte E„F rechnet nun der Geodät eben so wie die A„B„C„D selbst unter seine fixe Puncte auf der Platte, und nimmt ihren Abstand FE für eine gegebene Grundlinie an, um aus ihr neuerdings andere, oder auch ein ganzes Stück der Flur durch das Vorwärtsabschneiden aufzunehmen.

Er pflocket außerdem diese Richtungslinien als Durchschläge seiner Section bis dorthin aus, wo sie die Quadratseiten derselben durchschneiden; indem er besonders in Fuhren, an welche sich Grundstücke zu beiden Seiten anschließen, Pflocken einschläget, um an denselben die Detailmessung der Grundstücke selbst anzubinden.

Je näher ferner die Puncte F„E nach den Quadratseiten seiner Platte treffen, um so sicherer kann er durch sie die Quadratseiten seiner Section auf dem Felde selbst fundiren.

Verlängert er z. E. die Linie durch D„C„F, so schneidet diese die westliche Quadratseite in (f); nimmt er nun Ff auf der Platte mit dem Maaßstab zu 354 Fußen ab, so mißt er mit der Kette in der Richtung f„D„C

die

die 354 Fuße fort, uud stecket in (f) eine Fluchtstange, welche sonach in die westliche Quadratseite seiner Section selbst trift.

Will der Geodät an die Grundlinie AF ein Dreyeck AdF nach einem von ihm ausgestellten Signal bey (d) anreihen, oder den Punct (d) vorwärts durch die Visierlinie Fd„Ad abschneiden, so kann er durch diesen Punct (d), wie vorhin auch den Punct (δ), seiner westlichen Quadratseite bestimmen: er stecket sodann zwischen f„δ noch mehrere Fluchtstangen auf, und steckt so durch ihre Verlängerung die westliche Quadratseite seiner Section auf dem Felde wirklich ab, um in ihr die westliche Gränze seiner Operationen zu determiniren.

Bestimmt der Geodät eben so auch durch die Puncte d„A den Punct v der Nordseite und durch B„C„E auch den Punct (b) dieser Seite, so schneidet ihre Verlängerung die Westseite in ihrem eigentlichen Definitivpunct: er bestimmt eben so auch die übrigen Definitivpuncte seiner quadratischen Section.

So weit nun diese Quadratseiten die Fluren durchschneiden, so weit hat der Geodät dieselbe auch aufzunehmen; er gränzet in denselben mit vier andern Geodäten zusammen, welche die an seine Section anstoßenden Sectionen aufzunehmen haben.

Von diesen muß nun jeder derselben die Quadratseiten seiner Section aus den ihm auf seiner Platte bestimmten Puncten wirklich abstecken: treffen nun beide Geodäten in der Absteckung der nemlichen Quadratseite genau zusammen, so beginnet nun jeder seine fernere Operationen in seiner Section für sich; weichen statt dessen die Absteckungslinien beider um etliche Fuße von einander ab, so revidiren beide ihre Puncte, nach welchen sie die Quadratseite absteckten, gemeinschaftlich unter sich; sie gleichen die Differenz unter sich nach dem

Mit-

Mittel aus, wo jeder für seine Bestimmung so viel Zuverlässigkeit als der andere für sich findet.

Ist statt dessen die sich vorfindende Differenz in der Richtung der nemlichen Quadratseite beträchtlicher, als daß sie sich durch die Geodäten ohne weitere Verantwortlichkeit sollte ausgleichen lassen; und ist es zu vermuthen, daß rücksichtlich der durch die Coordinaten aufgetragenen Puncte, irgend ein Fehler oder Irrthum vorgefallen seyn möchte, so appelliren beide Geodäten vorerst an den ihnen zunächst vorstehenden Geometer, welcher sich deswegen an Ort und Stelle verfügt.

Dieser revidirt nun die dahin einschlagenden Operationen beider Geodäten; und erst nachdem er sich überzeugt hat, daß jene Differenz sich nicht heben lasse, berichtet er an die das ganze Geschäft dirigirende Stelle, und legt die Platten bey, in deren Quadratseiten sich jene außergewöhnliche Differenz ergeben hat.

Aehnliche Reclamationen stellet auch der Geodät in dem Falle an die höchste Stelle, wenn er einen fixen Punct aus mehrern ihm gegebenen abschneidet, und dessen Bestimmung unter sich stärker differirt, als daß dieser Fehler von ihm selbst abhängen könnte.

Diese verfüget nun vorerst die Revision der Coordinaten-Rechnung für die auf beiden Platten bestimmte Puncte, so wie des Auftragens derselben; sie läßt an Ort und Stelle dieselbe neuerdings trianguliren, wenn sich auf vorigem Wege der Fehler nicht vorfindet; es berichtiget nach der neuen Aufnahme der Trigonometer jene Puncte auf den Platten; während indessen die Geodäten andere Verwendung erhalten.

Für die Catastralaufnahme der Königl. Baierischen Monarchie, ist in München eine eigene Commission aus einem Vorstand mit etlichen Räthen etablirt, die sämmtlich

die

die für die Länderaufnahme erforderliche theoretische Kenntnisse, und practische Uebung haben.

Von diesen besorgt der Königl. Steuerrath Soldner die sphärische Aufnahme der Primär- und Secondärdreyecke bis zum zweiten Grad unmittelbar selbst, und berechnet deren Coordinaten; ihm folgen einige Trigonometer, welche die übrigen Secondärdreyecke aufnehmen, und diesen die Geometer, welche die übrigen secondären Dreyecke mit dem Meßtisch aufnehmen, so daß für jede Section oder Blatt wenigstens 3 bestimmte Puncte gegeben sind.

Diese besorgen auch das Auftragen der bestimmten Puncte, und weisen die ihnen untergeordnete Geodäten für ihre Sectionen dermaßen ein, daß immer mehrere neben einander liegende, gleichzeitig durch verschiedene Geodäten aufgenommen werden; sie leiten deren Geschäftsgang und revidiren am Ende ihre gefertigte Platten; während außerdem noch 2 Räthe der Commission selbst die Oberaufsicht und Direction im Ganzen ambulirend haben.

c. Hat nun der Geodät die Puncte bestimmt, aus welchen er die Quadratseiten seines Blatts am füglichsten abstecken kann, so schreitet er für die Detailaufnahme seiner Section unmittelbar selbst vor.

Dieses Detail nun am sichersten zu erlangen, erhalten die Gemeinden, deren Fluren in der zunächst aufzunehmenden Partie liegen, so wie alle Kirchen- und Schuldiener, Förster und Verwalter, von ihren einschlagenden Aemtern die strickteste Weisung, für die Auspflockung der ihnen angehörigen privativen und gemeinschaftlichen, oder sonst unter ihrer Aufsicht stehenden Grundstücke nach deren Gränzen; wobey streitige Gränzen nach den Prätensionen beider Parteien provisorisch verpflockt und dem Geodäten eingewiesen werden.

Dabey theilet sich der Geodät vorerst seine Section nach Partieen oder Flecken ab, in Beziehung auf die be-

reits auf dem Tischblatt gegebene fixe Puncte, aus welchen er einen Fleck ganz übersehen kann; er trägt darauf an, noch andere Puncte zu bestimmen, wo jene nicht genüglich sind, oder der Fleck durch sie nicht sicher genug durchs Vorwärtsabschneiden aufgenommen werden kann.

Ist nun der Geodät mit den bestimmten Puncten für einen gewissen Fleck, an welchem er seinen Meßtisch aufstellen will, im Reinen, so numerirt er alle in diesem Fleck bereits geschlagenen Pflocken; er schlägt noch mehrere, wo ihm diese für die genaue Aufnahme des Details des Flecks nicht genüglich sind, und lässet sich durch die Eigenthümer, oder durch deren Beauftragte, die ausgepflockten Grundstücke einweisen, um nach der Einweisung ein Croquillon für den Continens der Grundstücke entwerfen zu können, deren jedem er seine Pflocken-Nummern beisetzet.

Nach Beendigung dieser Arbeit trägt nun der Geodät darauf an, die Partie, oder den Fleck selbst in Grundlegung jener geometrischen Aufgabe: ein Grundstück aus zwey Standpuncten aufzunehmen, auf dem Meßtisch in verjüngtem Maaße dergestalt zu bringen, daß seine Projection im Ganzen und im Detail, dem aufgenommenen Fleck möglichst ähnlich ist.

Nun erfordert aber die Praxis dieser Aufgabe, an jeden Eckpunct des Grundstücks eine senkrecht stehende Stange oder Absteckzeichen, nach welchen in beiden Standpuncten Visionen genommen, und so die Stangen von der Grundlinie vorwärts abgeschnitten werden.

Da aber der Geodät aus seinen gewählten Stationen immer einen Fleck von mehrern Morgen, nach Umständen auch über 100 Morgen aufnimmt, der als solcher öfters sehr viele Aecker, Wiesen, Gärten, Weiher, Hölzer in sich hat, so würde durch die Absteckung so vieler Zeichen auf die ausgepflockten Ecken, die Aufnahme nicht

nur

nur aufhaltend, sondern auch irrsam seyn. Deswegen stellet der Geodät nur an Stellen, wo sich Straßen durchkreuzen, an welche sich Grundstücke anreihen, Signale auf, und läßt übrigens seinen Gehülfen nach der mit ihm genommenen Abrede, ein Absteckzeichen von einem Nummerpflocken zum andern tragen, während er selbst auf seiner Station A nach ihm jedesmal visieret; er winket ihn ab, nachdem er jedesmal die Visierlinie auf dem Meßtisch gezogen hat.

Hat nun der Gehülfe seinen Hingang geendet, so verbleibet er auf dem letzten Pflocken ruhig, während der Geodät seinen Meßtisch nach der andern Station B seiner gewählten Grundlinie transportiret, denselben allda gehörig stellet und einrichtet: er winket nach diesem dem Gehülfen, der nun sein Absteckzeichen auf die numerirten Pflocken auf dem Rückgang wie auf dem Hingang aufstellet, nach welchem der Geodät die Visionen nimmt, und nach ihm die Linien ausziehet, wobey der Durchschnitt zweier gleichnamiger Linien, immer die Projection des Nummerpflockens auf dem Meßtisch giebt. Es ziehet der Geodät diese Puncte durch gerade Linien für jedes Grundstück zusammen, und erhält sonach den ganzen Complex derselben in verjüngtem Maaße auf dem Meßtisch.

Ist diese Arbeit beendet, so vergleichet er nachgehends an Ort und Stelle, die für jedes Grundstück sich ergebene Figur mit diesem selbst, um sich gegen Irrthum zu sichern; er trägt solche Puncte nach den Regeln der Geodäsie nach, die er nur von einer der beiden Stationen sehen, mithin durchs Abschneiden nicht erhalten konnte; er mißt da und dort einige Linien mit der Kette zur Probe nach, die er nach der Figur der Dreyecke, durch welche er sie erhielt, am unzuverlässigsten bestimmen mochte; und giebt sich überhaupt alle Mühe, das Detail des

Flecks auf seinem Meßtisch möglichst ähnlich in seinem wahren verjüngten Maaß darzustellen.

Rücksichtlich dessen unterscheidet er auch nach den ihm vorgeschriebenen Zeichen, das Ackerland, die Wismath, Brüche, Moore, Haiden, Wälder und Hölzer nach ihren Holzarten, so wie Seen, Teiche, Weiher u. s. w.: er zeichnet in seinen Plan die Berge und Anhöhen nach verschiedenen Normen; die Chaußeen, Dämme, Landstraßen, Feldfuhren und Gehsteige; mit allem was sonsten in seinem Regulativ vorgeschrieben ist.

Konnte der Geodät einen solchen Fleck in Fig.(38.) durch die bestimmten Puncte A„B aufnehmen, so nimmt er den an ihn stoßenden auf ähnliche Art auch durch andere bestimmte Puncte auf, die er zu diesem Behuf vorläufig für dessen Aufnahme auf dem Meßtisch bestimmt hat: er unterläßt dabey nicht, nach seinen fixen Signalen von verschiedenen Seiten her, von welchen er sie sehen kann, Visionen zu nehmen, um diese fixe Puncte nicht nur möglichst genau zu bestimmen, sondern sich auch während der Arbeit selbst zu controliren: er nimmt auf diese Art die ganze Section innerhalb ihrer abgesteckten Vierung fleckweise auf, bis sie ganz completirt ist.

d. Indem nun die Detailaufnahme eines Flecks immer um so aufhaltender und mühsamer ist, je kleiner und in ihrer Form irregulairer seine Grundstücke sind, so hat man darauf angetragen, diese Aufnahme durch die sogenannten Distanzenmeßer zu erleichtern, mit welchen ein Fleck von gewißer Dimension immer aus einem einzigen Standpunct oder Station chartirt werden kann.

Ein solcher Distanzenmesser bestehet immer aus einem Achromat, welcher in einer Kippe auf einer Meßregel auf und nieder beweglich, und vor seinem Oculare mit einem Branderschen Glasmikrometer versehen ist.

Will

Will sich der Geodät denselben für sein Auge einrichten, so stellt er eine Latte von 10 bis 12 Fußen in einem Abstand von 600 Fußen, oder eigentlich auf eine Weite = d, senkrecht auf die Visierlinie des Achromats ab, daß das Bild der Latte gerade (m) Intervalle auf dem Mikrometer mißt, während er die Latte aufs deutlichste siehet.

Nun entfernet er nach und nach die Latte bis auf (d+Δd) Fuße, wo ihr Bild noch (m—Δm) Intervalle mißt; er nähert sich nachgehends die Latte auch auf (d—Δd) Fuße, wobey ihr Bild nun (m+Δm) Intervalle abschneidet; und fertiget sich hierüber eine Tabelle, die um so brauchbarer ausfällt, je mehr Versuche dieser Art angestellt worden sind; und je genauer man dabey zu Werke gehet.

Uebrigens ist die Latte selbst in einer an ihrer hintern Seite angebrachten Hülse an einem Stab auf und nieder beweglich, der durch 3 an ihm bewegliche Füße senkrecht gestellt wird, und an der Latte selbst ist ein Visierlinial rechtwinklicht auf dieselbe in ihrer Mitte feste. Durch dieses siehet der Gehülfe nach dem Fernrohr des Geodäten, und stellet dadurch die Latte selbst senkrecht auf die Visierlinie des Rohrs.

Will nun der Geodät mit diesem Instrument, das Detail eines Flecks seiner Section aus einer Station aufnehmen, so numerirt er wie vorhin in (c) die Gränzpflöckgen seiner Grundstücke, macht sich von denselben sein Brouillon, und läßt nun den Gehülfen mit der Latte den mit ihm abgeredeten Gang beginnen.

Stellet nun dieser auf einem Pflocken (α) die Latte auf, indem er durch ihr Visier nach der Mitte des Meßtisches siehet, so zählet der Geodät die Intervalle, welche ihr Bild auf der Scale seines Achromats abschneidet.

Sind

Sind diese (m—n) Intervalle, so stehet der Pflocken (α) von der Station um (d+Δd) Fuße ab: es nimmt daher der Geodät diese auf seinem Meßstab ab, und trägt sie auf die nach dem Pflocken auf den Meßtisch gezogene Visierlinie, und bestimmt so den Punct (α) des Grundstücks.

Indem nun der Geodät mit sämmtlich übrigen Pflokken der Grundstücke des Flecks eben so verfähret, erhält er diese, ohne von der Stelle zu kommen, in ihrer Verjüngung auf dem Meßtisch selbst; er wendet dieß Verfahren in der Folge so oft an, als es das Terrain verstattet, und trägt solche Puncte geodätisch nach, welche er an seiner Station nicht sehen konnte.

Diese Aufnahme findet dort ihre Gränze, wo nach der Güte des Achromats und nach der Gesichtsschärfe des Geodäten die Latte sich bereits so undeutlich präsentiret, daß sie um einige Fuße dem Meßtisch angenähert, oder von ihm weiter entfernt werden kann, ohne daß das Auge die Veränderung der Größe ihres Bildes verspüren sollte.

Für mein Auge und meinen 15zolligen Achromat tritt dieser Fall ein, wenn die Latte 1800 Fuße vom Auge entfernet ist: ich verspüre eine Veränderung der Latte von 2 Fußen, wenn diese um 1500 Fuße entfernt ist. Daher konnte ich mit diesem Instrument höchstens auf 1200 Fuße bis auf einen Fuß sicher operiren.

Der Reichenbachische zum Behuf der Catastralaufnahme der Königl. Baierischen Monarchie gefertigte Distanzenmesser hat statt des Glasmicrometers zwey feste Puncte (α „β), und seine Latte steht nicht horizontal, sondern muß immer in der Verticalebene der Visierlinie sich befinden; auf ihr befindet sich eine Eintheilung, die folgendermaßen gemacht wird.

Nach-

Nachdem der Geodät seinen Achromat so gestellet hat, daß er Objecte, die auf 600 Fuße entfernt sind, am deutlichsten siehet, bringet er die Latte in einen gegebenen Abstand, z. E. auf 300 Fuße vom Objectivglas des Achromats: er faßt nun den ersten Strich der Latte, der ungefähr 2 Fuß vom Boden abstehet, mit dem Punct (β) des Fernrohrs, und läßt seinen Gehülfen auf der Latte dorthin einen Strich machen, wo der andere Punct (α) sie anschneidet; und malt nachgehends mit dem Pinsel an diesen Strich die Distanz 300.

Eben so werden auch die Striche für 50 bis 100, von 100 bis 200 u. s. w. von 5 zu 5 Fußen angestrichen.

Bey dem Gebrauch dieses Instruments zum Detailliren visieret der Gehülfe, nachdem er die Latte auf einen Pflocken (C) ausgestellt hat, durch das Visierlineal der Latte nach dem Meßtisch, und stellet diese dadurch in der Ebene der Visierlinie senkrecht auf dieselbe; siehet nun der Geodät, daß die Puncte (α) und (β) den Strich 300 anschneiden, so nimmt er die 300 Fuße auf seinem Maaßstab ab, und trägt sie auf dem Meßtisch für den Abstand des Pflockens (C) von seinem Stationspunct auf.

Dieses Auftragen möglichst zu erleichtern und sicher zu machen, hat Hr. Steuerrath Lämmle eine eigene sinnreiche Vorrichtung erfunden, nach welcher sich eine Spitze in einen Stangencirkel nach einer Nonius-Eintheilung verschieben läßt, die zugleich den Punct (C) in das Papier sticht.

Wo der Pflocken C auf einem Berge stehet, zeiget der an dem Fernrohr angebrachte Höhenkreis seinen Elevationswinkel, und eine für die Elevationen berechnete Tabelle giebt den horizontalen Abstand des Pflockens von der Station, aus jenem bergaufwärts abvisierten Abstand.

e. Ein anderes Verfahren, das Detail einer Flur aus einer Station aufzunehmen, hat der Geodät, Hr. N. N. zuerst ausgeführt.

Es

Es befinde sich der Geodät in E und will den Punct U auf seinen Meßtisch bringen, ohne daß er selbst die Stelle E verläßt. Fig. 38.

Stünde in U ein Signal oder Absteckstange, oder auch statt dessen der eine Gehülfe A, so nimmt der Geodät in E eine Vision nach U, und ziehet die Linie nach demselben: stellet sich nun sein Gehülfe B in der Quadratseite der Section in W mit einer Stange dergestalt auf, daß er sich in der geraden Linie zwischen B„D„u befindet, so visieret der Geodät in E nach ihm, und merket den Punct W auf der Quadratseite an, in welchem die Visierlinie seiner Regel diese durchschneidet.

Nun legt der Geodät die scharfe Kante seiner Regel in dem Puncte W„B„D aufs genaueste an, und durchschneidet die von E nach U gezogene Visierlinie in u; und findet so die Projection u des Pflockens U auf dem Meßtisch.

Hat der Geodät 2 Gehülfen, so kann er nach diesem Verfahren jeden Fleck seiner Section aus einer Station, und so durch mehrere in derselben genommenen Sectionen, die ganze Section detailliren, in soweit er die Aussicht nach ihren Quadratseiten frey hat!

Er beredet sich nemlich mit dem Gehülfen A wegen dem Weg, den dieser nach seinem Brouillon zu nehmen hat, und redet mit dem andern B die Zeichen ab, welche er mit seiner Fahne ihm geben muß, je nachdem er einen oder den andern bestimmten Punct C„A„B„D oder mehrere zugleich für sein Allignement wegen der Abkürzung seines jedesmal zu machenden Gangs, und wegen des Winkels nimmt, unter welchem die allignierende Linie, die Visierlinie nach dem A schneidet.

Diese Methode, aus einer Station zu detailliren, gewährt vor dem Abschneiden große Vorzüge; sie giebt die Lage des abgeschnittenen Puncts um so genauer oder um so zuverlässiger, je schärfer sich die Face des Li-

neals

neals nach dem Abstand der Alignementspuncte von einander ziehen läßt, §. 8. II., und je näher diese Linie die Visierlinie nach den A unter einem rechten Winkel schneidet: sie ist außerdem nicht so beschränkt, wie die Detailaufnahme durch die Distanzenmesser, und kann auf mehrere tausend Fuße sich erstrecken, statt dessen jene schon in 1000 bis 1200 Fußen unsicher werden (d.).

f. Fallen in die Section des Geodäten ein oder mehrere Ortschaften, mit oder ohne Kirchthürme, so bestimmet er in dem Fleck, wohin diese treffen, zunächst die Mitte des Kirchthurms durchs Vorwärtsabschneiden aus seinen ihm gegebenen Coordinatpuncten, und sucht außerdem den Ein- und Austritt der Hauptstrassen des Orts aus demselben aufs genaueste zu bestimmen, damit er nachgehends durch diese Puncte den Ort selbst, nach allen seinen bewohnten und unbewohnten Gebäuden, Hofreuthen, Gärten u. s. w. nach den Regeln der elementaren Geodäsie gehörig aufnehmen kann.

Sind solche Orte mit ihren Fluren in Wäldern dermassen versteckt liegend, daß der Geodät sie von seinen Coordinatpuncten nicht entdecken kann, so trägt er darauf an, durch diese an der Brahme des Waldes, und insbesondere dort, wo die Fahrstrassen aus ihm hervortretten, fixe Puncte abzuschneiden, von welchen aus er nachgehends durch Traversen sich nach dem Orte selbst hin arbeiten, und diesen mit seiner Flur detailliren kann.

Eine solche Aufnahme der Sectionen durch das Vor- und Rückwärtsabschneiden aus gegebenen Coordinatpuncten gewähret nun zwar die Genauigkeit nicht, welche eine stricte, nach geodätischen Principien ausgeführte Flurvermessung leistet: sie hat aber statt dessen die Förderung der Arbeit für sich; worauf man immer bey so großen, über ein ganzes Reich sich verbreitenden Detailmessungen insbesondere sehen muß; und die Resultate,

tate, welche hieraus für das Flächenmaaß der einzelnen Grundstücke sich ergeben, sind für die Steuerregulirung derselben, verbunden mit einer passenden Bonitirung des Bodens hinlänglich genügend.

Bey der K. Baierischen Landesvermessung lehret ferner die Erfahrung, daß ein Geodät in den andern in Jahresfrist fünf Platten, und wenn der Sommer den Arbeiten sehr günstig ist, auch sechs Platten jede zu 1600 Morgen fertiget: es kann einer in einem Tag 80 bis 100 Morgen detailliren, wo die Grundstücke nicht zu klein sind, und alle sämmtlich abgeschnitten werden können.

Da ferner die Förderung der Arbeit hauptsächlich von dem mehr oder minder occupirten Terrain, das nur kleine Flecke auf einmal zu detailliren gestattet, und der Kleinheit und Irregularität der Grundstücke und den in die Section fallenden Ortschaften vorzüglich abhängt, so bleibt es der Billigkeit gemäß Maxime, die Sectionen dermaßen unter die Geodäten zu vertheilen, daß jener, welcher eine sehr aufhaltende Platte aufgenommen hat, nach dieser eine Section erhält, die sich bequemer aufnehmen läßt; damit rücksichtlich des Honorars und der Anstrengung unter den Geodäten, so viel möglich ist, eine Gleichheit hergestellt werde.

Uebrigens wird das Honorar für die Charte, dem Ermessen der Geometer überlassen, welche die Sectionen unter die Geometer austheilen; und es kann nach demselben ein Geodät im Durchschnitt täglich 3 Gulden verdienen, wobey er aber seine Gehülfen selbst lohnen muß.

Die Revision der aufgenommenen Section.

V. Sind in einem Gaue des Staats bereits mehrere sich gränzende Sectionen aufgenommen, so unterziehet der Geometer, welcher dieselbe den Geodäten eingewie-

wiesen hat, die Arbeiten derselben seiner Revision, um sich zu überzeugen, ob die gefertigten Platten, wie sie sind, ohne Correction an die dirigirende Stelle mit voller Approbation eingeschickt werden können.

« Diese aber gründet sich auf das Princip, daß sämmt-
« liche Grundstücke auf der Platte unter sich und gegen
« die Coordinatpuncte eine Lage haben müssen, die jener
« so genau als möglich ähnlich ist, welche ihre Projectio-
« nen auf der Horizontalebene der Section unter sich,
« und gegen jene Puncte haben. »

Um sich nun dessen zu überzeugen, lässet sich der Revisor von dem Geodäten, nach vorgenommener Prüfung seiner Meßkette, vorerst die Grundlage des Ganzen, oder die Quadratseiten einweisen, welche jeder für seine Section abgesteckt hatte (IV.b.); er probiret ihre gerade Absteckung und notiret die zwischen der Absteckung der nemlichen Seite durch beide Geodäten, etwa sich vorfindende Differenzen, in dem abzuhaltenden Revisionsprotocoll; er vergleichet nun ferner auf beiden Platten die Puncte, in welchen die nemlichen Grundstücke, auf der einen wie auf der andern angränzenden Platte von den Quadratseiten durchschnitten werden, und notiret die sich vorfindende Abweichungen.

Um sich ferner zu überzeugen, ob die Grundstücke auch innerhalb der Section ihre richtige Lage haben, verlängert der Revisor die Verticalebene durch die Coordinatpuncte der Platte bis nach deren Quadratseiten, oder auch nur so weit dieses angehet; er ziehet diese Linien auch auf der Platte selbst aus, und siehet nun, wo diese Linien auf der Charte einen Punct anschneiden, ob auch diese Linie auf dem Terrain den nemlichen Punct durchschneidet, oder in wie weit die Linie von ihm abweichet.

Eben so suchet er auch in diesen Linien die Puncte auf, welche sich rückwärts durch die Coordinatpuncte abschnei-

schneiden lassen; und bestimmet diese aufs genaueste, um sich zu überzeugen, mit welcher Genauigkeit der Geodät dieselbe aufgefunden habe.

Letztlich lässet er sich von dem Geodäten auch die Stationspuncte einweisen, welche derselbe für die theilweise Detaillirung der Section, aus den Coordinatpuncten zunächst, und nachgehends noch vorwärts abgeschnitten hat, und probiret die dahin genommenen Visionen an Ort und Stelle: er mißt außerdem noch mit der Kette hin und wieder solche Differenzen nach, die sich vor andern genau messen lassen.

Trift nun alles aufs genaueste mit dem Großen der Section überein, so findet die Platte die vollste Approbation, mit dem Prädicat der ersten Classe; sie kommt in die andere Classe, wenn sich hin und wieder noch Differenzen zeigen, die sich ihres Orts noch legitimiren lassen.

Diese legitimen Differenzen, welche der Revisor noch passiren lassen kann, gründen sich nicht sowohl auf die Folgen der kleinen, beim Winkel- und Linienmessen auch bey Anwendung des größten Fleißes unvermeidlichen Fehler, §. 8. II., als vielmehr auf die hygrometrische Veränderung des auf das Tischblatt ausgespannten Papiers. §. 8. III.

Da nemlich der Geodät von Morgens bis Abends auf seinem Tischblatt operiret, so dehnet sich das Papier desselben, und ziehet sich wieder zusammen, so wie die Luft feuchter oder trockener wird; und die ihm gegebene Coordinatpuncte erhalten dadurch veränderliche Lagen und Abstände; wenn auch, wie hier vorausgesetzt wird, das Papier keine Rippen hat.

Hat daher der Geodät aus denselben Morgens, wo der Thau noch den Boden deckt, einen Punct aus jenen abgeschnitten, so kann dieser Punct auf dem Meßtisch eine von jener Bestimmung etwas abweichende Lage

erhal-

erhalten, wenn er ihn zu einer andern Zeit abschneidet, wo die Luft sehr trocken ist.

Rücksichtlich alles dessen lehrte nun die Erfahrung bey der K. Baierischen Landesvermessung, daß der Geodät in der Bestimmung abgeschnittener Stationspuncte, nach dem zum Grunde liegenden Maaßstab von 5000 Fußen auf einen Chartenfuß, nur auf 2...3 Fuße sicher seyn könne; es lassen daher die Revisoren eine solche Differenz immer noch als legitim passiren; sie nehmen es statt dessen mit der Absteckung der Verticalebene durch die Coordinatpuncte auf dem Terrain selbst um so genauer; weil diese sich besonders auf der Ebene mit grösster Schärfe vollziehen lassen, §. 9., wenn besonders der Geodät sich hiezu eines guten Sackperspectis bedienet.

Findet statt dessen der Revisor, daß der Geodät einen Stationspunct wirklich fehlerhaft bestimmt hat, so bestimmet er denselben selbst aufs genaueste, und radiret mit einem feinen Radirmesser, aus dem Fleck, welchen er durch diesen Punct aufgenommen hat, das Detail heraus, und beauftraget ihn, dasselbe von neuem aufs genaueste aufzunehmen; er verfähret eben so mit allen Puncten, für welche er Differenzen findet, welche die Gränzen der legitimen überschreiten: er verwirft die Platte ganz, in welcher die Mehrheit des Ganzen gar zu fehlerhaft aufgenommen worden ist; der Geodät entbehret des Honorars derselben, und ist gehalten, den auf dieselbe unter Caution etwa erhaltenen Vorschuß wieder heraus zu bezahlen.

Das Berechnen und Copieren der aufgenommenen Blätter.

VI. Nach diesen revidirten Blättern (V.) berechnen nun die Geodäten, welche dieselbe aufgenommen haben, in Zeiten, wo sie im Freien nicht arbeiten können, die

Flä

Flächen der einzelnen Grundstücke derselben; so wie die Flächen der an sie anstoßenden Ströme, Flüsse, Bäche, Chaußeen, Landstraßen und Vicinalwege, der Gebäude u.s.w.

Diese Rechnung wird nun gewöhnlich nach planimetrischen Regeln geführt, indem der Geodät die zu berechnende Stücke in Trapezien und Dreyecke zerleget, deren Seiten und Perpendikel er mit einem scharfen Cirkel möglichst genau auf deren Maaßstab abnimmt, und nach diesen Maaßen die Flächen berechnet.

a. Diese Rechnung nun zu controliren, theilet der Geodät die Vierung seines Blatts von 1000 zu 1000 Fußen in gleiche Theile oder Parcellen, oder er theilet auch jede Seite derselben durchs Bisectiren in eine solche Anzahl von Theilen, daß er Rectanguln oder auch Parallelogramme von einer gegebenen Anzahl von Morgen oder andern seines Orts eingeführten, oder sonstigen von seiner Direction vorgeschriebenen Flächenmaaß für die Parcelle erhält.

Hält nun z. E. ein solcher Theil gerade 15 landüblliche Morgen, so muß auch die Summe der einzelnen in dieses Parcelle fallenden Grundstücke eben so viel Morgen completiren: wo nun dieses nicht genau zutrift, ändert der Geodät durch ein wohlüberlegtes Nehmen und Geben insbesondere das Flächenmaaß solcher Grundstücke, die nach ihrer Länge und kleinen Breite sich nicht so sicher als andere berechnen lassen; er schlägt auch, wenn dieses nicht genüget, den noch obwaltenden Unterschied unter sämmtliche Grundstücke der Parcelle nach der Gesellschaftsregel aus.

Addiret man sämmtliche von dem Staat aufgenommene, seine Charte constituirende Blätter zusammen, so ergiebt sich die Oberfläche des Staates selbst, in ihrer Summe nach landüblichen Morgen u. dergl., die man nun durch eine gewisse Reductionszahl auf geo-

gra-

graphische Quadratmeilen bringen kann, nach welchen bekanntlich die Oberfläche eines aufgenommenen Staates ausgesprochen wird.

Diese Quadratmeile ist nun in soweit bis jetzt nicht definitiv bestimmt, als der Umfang des Aequators unserer Erde selbst noch nicht definitiv bestimmt ist.

Nimmt man die geograph. Meile zu 7418,5 Meter, und 10000 Meter zu 34263 landüblichen Fußen an, so mißt die Meile 25400 solcher Fuße; mithin die geogr. Quadratmeile 645160000 Quadratfuße; oder 16119 Morgen, wenn man 40000 Quadratfuße auf einen landüblichen Morgen rechnet.

b. Bey der Königl. Baierischen Catastralvermessung ist die Vierung eines Blatts 8000 Fuße; also ihr Inhalt 64000000 Baierische Quadratfuße; von welchen 40000 einen Baierischen Morgen geben. Das Blatt enthält also 1600 solcher Morgen.

Um nun die Bestimmung des Flächenmaaßes jedes Grundstück eines jeden Blattes nicht der Willkühr der Geodäten anzuvertrauen, wird jedes in die Königl. Steuer-Cataster-Commission eingeschickte Blatt durch eigene verpflichtete Revisoren revidirt.

Diese bedienen sich eines Quadrats von dünnem Horn, auf welchem Quadrate eingerissen sind, nach welchen sich das Flächenmaaß eines Grundstücks ergiebt, indem man die Quadrate nachzählet, welche das Grundstück decken.

Von einem solchen Flächen-Quadrat lehret die Erfahrung, daß man nach demselben eine Fläche von 10 Morgen immer bis auf $\frac{1}{5}$ Morgen, oder 50 Morgen bis auf einen Morgen sicher bestimmen könne.

Außerdem bedienen sich die Revisoren noch des von dem Geometer, Hrn. Zobel, erfundenen Planimeters, oder jenes Instruments, nach welchem Flächen unmittelbar berechnet werden können.

Sie berechnen mit demselben die Fläche der einzelnen Gemeinbezirke, der Gemeinfluren nach ihren auf dem Blatt verzeichneten Gränzen, und notiren sich indessen die erhaltene Flächenmaaße, ohne daß der Geodät, welcher die Blätter nachgehends zu berechnen bekommt, davon Notiz erhält.

Dieser rechnet nun das Detail der Gemeinfluren; wornach der Revisor das Flächenmaaß derselben mit dem seinigen vergleicht, und nur in dem Fall sein: Revidit, auf das Blatt schreibt, wenn die Rechnung des Geodäten von der seinigen nicht merklich abweichet: in jedem andern Falle hat der Geodät das Blatt nochmals nachzurechnen.

c. Da ferner das Blatt, wie es der Geodät an die Direction einschicket, nicht die Reinlichkeit und Nettigkeit in der Zeichnung haben kann, welche man von eigentlichen Zeichnern oder Deßinateurs fordert, so muß für die Fertigung der Catastral-Charte des Staates, jedes solche Blatt copiert werden.

Diese Copierung geschiehet nun entweder nach dem Maaßstab der Charte selbst, oder auch nach einem kleinern von der Direction vorgeschriebenen Maaßstab, vermittelst des Pantographs; und die sonach gefertigte Charte wird nun von den Deßinateurs nach zum Grunde liegenden oder angenommenen Manieren dermaßen ausgezeichnet, daß die Charte selbst auch die physicalische Beschaffenheit der Oberfläche des Staates, nach seinem urbaren Lande und seinen Producten, nach seinen Wäldern, Brüchen, Haiden, Gebirgen, Bergen, Landhöhen, Strömen, Flüßen, Canälen, mit ihren hydrotechnischen Anlagen, nach seinen Seen, Teichen und Weihern, und nach seinen bewohnten und unbewohnten Brandstätten, und Etablissements, so genau als möglich ist, darstellet.

Eine

Eine solche Copie muß nun immer von der auf ihrem Tischblatt noch aufgespannten Platte selbst abgenommen werden; weil das Papier nach seinem Abschneiden von dem Tischblatt einschwindet: es ist daher auch räthlich, die Blätter immer auf ihren Tischblättern aufgespannt zu lassen; um diese um so sicherer gebrauchen zu können, wo sich in der Folge ein Anstand vorfinden sollte.

Bey der Kön. Baierischen Catastralvermessung der Monarchie, werden die aufgenommenen Platten in ihrer wirklichen Größe durch einen von Hrn. von Reichenbach erfundenen Pantograph oder Fac simile auf Stein copirt, und lythographirt.

Dieß Instrument bewegt sich an der Verticalsäule einer Rahme, über welcher oben eine fein geschliffene schwarz grundirte Marmorplatte liegt, während die gleich große Meßtischplatte in ihr lieget.

Nun fähret der Lythograph mit der feinen Spitze dieses Instruments auf dem Umfang der auf dem Tischblatt aufgenommenen Grundstücke und sämmtlichem auf der Platte gezeichnetem herum, während gleichzeitig sein oberer Stift auf der grundirten Steinplatte die Linie einplättet.

Diese Contoure reisset nachgehends der Lythograph in den Stein selbst ein; er giebt dem Blatt seine vorschriftmäßige Schraffirung, Auszeichnung und Schrift; und bereitet sie so für den Abdruck unter der Presse vor.

Die Königl. Steuercommission hat daher ein eigenes Lythographisches Büreau unter seiner Direction, in welchem die Platten mit allen und jeden Vortheilen und Kunstgriffen lythographirt und abgedruckt werden.

Uebrigens verwendet der Lythograph für eine Platte gewöhnlich zwey volle Tage, um sie auf den Stein zu übertragen.

Die Meßtischplatten, so wie ihre Abrisse auf dem Stein, werden in dem Repositorio der Commission auf immer aufbewahrt.

Section einer topographischen Charte.

VII. Wird der Staat blos topographisch aufgenommen (III.), so richtet sich die Größe der Sectionen seiner topographischen Charte, wie bey seiner Catastralaufnahme, zunächst nach der Größe der Quadratseite, die man dem Meßtisch geben kann (IV.); und der Topograph erhält von seiner Direction für jede der ihm angewiesenen Sectionen eben so, wie der Geodät, auf seinem Tischblatt einige durch Coordinaten berechnete und aufgetragene, oder sogenannte Coordinatpuncte, nach welchen er das Detail der Section aufzunehmen hat.

Er schneidet daher unmittelbar aus denselben, in soweit es angehet, die von denselben sichtbare Thürme, Bergspitzen, Signale und sonstige Objecte ab, die er nach seiner Instruction in seine Section aufnehmen muß: er bestimmt sich außerdem durch das Vor- und Rückwärtsabschneiden, nach vorgegangener Recognoscirung seines Terrains, gewisse Standpuncte, aus welchen er das Detail abschneidet, welches er durch jene Puncte nicht erhalten kann: er bestimmt nach demselben insbesondere die ausspringenden Ecken der Brahmen der Wälder und Hölzer, und die Puncte, in welchen die sie durchschneidende Fahrwege aus ihnen hervorbrechen, um durch diese sich durch Traversen nach den in den Wäldern versteckt liegenden Ortschaften und Etablissements geodätisch hin zu arbeiten: er bestimmt nicht minder durch jene Standpuncte, und wo es angehet, auch durch das Problem der 3 Puncte, §. 7. IV., die vorzüglichsten Wendungen der Ströme und Flüsse, so wie der Gebirge und Bergketten;

und

und zeichnet die kleinern Wendungen mit ihren Abdachungen situationsmäßig nach seiner Instruction ein.

Es ist durch ihn die Section aufgenommen, wenn er alles und jedes auf seinem Tischblatt nach seiner Lage geodätisch bestimmt, und situationsmäßig verzeichnet, und gehörig disinirt hat, was nach seiner Instruction in dem Blatt seine Stelle finden mußte.

Uebrigens verhält sichs mit der Revision der Section wie in (V.), und rücksichtlich ihrer Flächenrechnung und Copierung, wie in (VI.).

Auf eine der Sectionen wird nun auch der Maaßstab der Charte dorthin verzeichnet, wo er seinen schicklichsten Platz findet; so wie jene den Caligraphischen Titel der Charte erhält, die sich zunächst nach ihrer Lage unter den übrigen für ihn eignet.

Es wird dabey der Maaßstab selbst durch Transversalen in so kleine Theile abgetheilt, als auf ihm noch gerade gesehen oder unterschieden werden können.

Diesem wird noch außerdem ein Meilenmaaßstab beigefügt, nach welchem sich die Distanzen nach landüblichen Meilen messen lassen, und wobey die Meile noch in die möglichst kleinsten Theile abgetheilt wird.

Man füget diesem noch andere Meilenstäbe bey, für Meilen anderer Staaten, um auch nach diesen die Distanzen messen zu können.

Section einer geographischen Charte.

VIII. Die geographische Charte (III.) ist entweder die verjüngte Copie der topographischen Charte des aufgenommenen Staates, oder man nimmt statt dessen auch nach Umständen, ein Triangularnetz für sie auf, das man nachgehends durchs Interpoliren completirt.

Dieß Triangularnetz aber constituirt sich durch die Anreihung von Primär- und Secondärdreyecken, die man auf den Bergen, Landhöhen und Thürmen trigonometrisch oder auch nur geodätisch mit dem Meßtisch aufnimmt, und nachgehends orientiret; so daß ein solches Netz vorerst alle und jede Orte des Staates in sich enthält, die man unmittelbar durchs Trianguliren bestimmen kann.

Sind nun diese Puncte entweder auf dem Meßtisch unmittelbar vor- oder rückwärts abgeschnitten, oder auch durch ihre Coordinaten auf die Charte selbst verzeichnet, so kommt es noch darauf an, die übrigen zwischen diese hineinfallende Orte situationsmäßig einzuzeichnen.

Man wählet dabey für diese Orte solche aus, die in der Charte nach ihrer Größe und Bevölkerung vor andern nach gewissen Gradationen Platz finden müssen, und nach der Größe der Charte auch in ihr Platz finden können; und zeichnet diese in ihr dorthin, wo ihre Lage gegen die Coordinatpuncte der natürlichen zunächst entspricht, welche diese Orte gegen jene wirklich unter sich haben; und zeichnet nach diesen die Richtung der Gebirge, die Bergketten, die Flüsse, Chaußeen, mit dem übrigen Topographischen so weit dieses in der Charte Platz findet, situationsmäßig ein, nach Manieren, welche entweder die Instruction vorschreibt, oder welche man sich auch in Ermanglung derselben unter den bisher eingeführten Zeichnungsmanieren freiwillig auswählet.

Eben dieß gilt auch von den Zeichen, durch welche man Festungen, Haupt- und Provinzialstädte, Landstädtchen, Marktflecken, Kirch- und andere Dörfer u. dergl. unter sich auf der Charte unterscheiden will.

Ein solcher Fleck auf der Charte, in so weit er wenigstens zwischen drey gemessenen oder Coordinatpuncten situationsmäßig mit dem Detail ausgefüllt werden muß,

mag

mag nun hier eine Section der geographischen Charte heißen!

Kann der Geometer, welcher die Charte des Staates auf diese Art aufnimmt, von einem oder dem andern Amte desselben, eine bereits von demselben geometrisch oder trigonometrisch aufgenommene Aemtercharte erhalten, so kann er sich durch dieselbe die Detaillirung der Section, in welche dieses Amt fällt, erleichtern.

Er prüfet nemlich zuvörderst die Lage der Orte, die mit seinen Coordinatpuncten gleichnamig sind, durch die Distanzen, welche sie unter sich auf der Amtscharte, und auf seiner Charte haben.

Treffen nun jene mit seinen Bestimmungen nach Wunsch zusammen, so zeichnet er das Detail der Section folgendermaßen aus.

Es seyen z. E. $A_{,,}B_{,,}C_{,,}D\ldots$ Puncte auf der Amtscharte, die mit den Coordinatpuncten $a_{,,}b_{,,}c_{,,}d\ldots$ seiner Charte gleichnamig sind, so zieht er auf beiden Charten von einem dieser Puncte zum andern gerade Linien, und erhält sonach für (n) Puncte (n—2) Dreyecke; in deren jedes er nun das Detail der Amtscharte in so weit nach verjüngtem Maaße einzeichnet, als dasselbe Platz findet.

Wo die Aemtercharte nur situationsmäßig, jedoch nicht gar zu fehlerhaft aufgenommen worden seyn sollte, verfährt der Geometer für das Detail seiner Section ähnlichermaßen; und interpolirt so das Detail derselben nach dieser, wiewohl um so unsicherer, je mehr die Distanzen der Coordinatpuncte von jenen der Charte abweichen.

Wo sich bereits eine von dem Staate situationsmäßig aufgenommene Charte vorfindet, kann auch diese von dem Geometer für die Detaillirung der Sectionen seiner Charte, jedoch immer mit gehöriger Auswahl nach vorher gegangener Prüfung benutzt werden.

Bey der Aufnahme meiner Charte von dem ehemaligen Franken, oder der Charte von dem Main- und Rezatkreis des Königreichs Baiern, Nürnberg bey Schneider und Weigel, habe ich über das ehemalige Franken ein Deyeckneß über Puncte gezogen, die als Hauptstandpuncte auf derselben angegeben sind; und die Coordinaten nach den Azymuth auf dem Hohenstein nach Mariahülf bey Amberg berechnet. Ich bestimmte die Orte durchs Trianguliren so weit es angieng, und benutzte für das zwischen die gemessene Puncte fallende Detail, die mir gefälligst mitgetheilte Aemtercharten, und Specialcharten der in Franken liegenden Staaten und Herrschaften.

Graduirung einer geographischen Charte.

IX. Ist die geographische oder Landcharte nach (VIII.) aufgenommen, und in ihrem Detail ausgezeichnet, so ist ihre Graduirung um so mehr eines ihrer wesentlichsten Stücke, je größer der Staat ist, welchen sie vorstellet.

Nun bestimmet man aber nach derselben die geographische Lage der Orte rücksichtlich des Aequators der Erde, und eines Meridians, welchen man auf ihr für den ersten annimmt, oder man bestimmt die geographische Breite und Länge der Orte des aufgenommenen Landes, nach Graden und deren Theilen, durch gewisse auf der Charte gezogene krumme Linien, die an ihrem Rande auslaufen, und siehet dabey die Charte selbst als ein Stück eines Kegels an, welcher das Land in seinem mittlern Parallel berühret, während seine Axe in die Verlängerung der Erdaxe selbst trift.

Um nun die Charte möglichst genau zu graduiren, berechne ich zunächst für ihre Vierung, eine der Erde ähnliche Ellipsoide, welche der auf ihr senkrechte Ku-

gel, in ihrem mittlern Parallel berühret, von welchem die Landcharte selbst ein Stück ist.

a. Diese Ellipsoide eignet sich nun zunächst nach der größten Ausdehnung des Staates von Norden nach Süden, oder statt dessen von Osten nach Westen: sie richtet sich auf jeden Fall nach der größten Ausdehnung des Staates nach einer oder andern dieser Richtungen.

Von diesen zweien verschiedenen Fällen erwäge ich nur zuvörderst den andern, und nehme deswegen einen Staat an, der in der Richtung von Osten nach Westen mehr Meilen, als in der Richtung von Norden nach Süden mißt, und bedinge übrigens für denselben folgendes.

1) Es sey in Fig. (39.) A der Ort im Staate, von welchem aus der Geometer die nördlichen und südlichen Abscissen der Orte des Staates, auf seiner Meridianlinie, und durch ein allda genommenes Azymuth, auch die östlich- und westlichen Ordinaten derselben auf jenem Meridian berechnet hatte: er habe deswegen die geographische Breite jenes Orts und das Azymuth allda aufs genaueste bestimmt, oder auch nach anderen seither verificirten Bestimmungen angenommen, welche jene Polhöhe des Ortes A zu 48°„36′„0″ festsetzen.

Nun ist ferner die größte Ordinate des Landes von dem Meridian des Ortes A nach Osten zu 475288; und nach Westen zu 811903 Metern berechnet, und aufgetragen worden.

Will nun der Geometer seine Charte einem Ellipsoid anpassen, dessen Axenverhältniß 333 : 334 ist; so mißt nach Sorlins Angabe, auf der Erde

der

der Breiten-Grad	der Längen-Grad	von dem Grad
111153 Meter	76013 Meter	47
111171	74583	48
111188	73129	49
1111205	71654	50
1111222	70156	51

Biſectiret der Geometer den Abſtand der nördlichſt- und ſüdlichſten Ordinate ſeines Plans, ſo fällt der Biſectirungspunct in die Meridianlinie des Ortes A um 155656 Meter mehr nördlich als der A Punct ſelbſt.

Nun gehen aber dem Parallel durch den Ort noch 48°—47°„36 oder 24 Minuten zu 48 Graden ab; und dieſe importiren nach jener Tabelle $\frac{2}{6}\frac{4}{0}$. 111171 oder 44468. Meter. Setzt man zu dieſen noch den Grad 49 mit 111188, ſo completiren dieſe gerade die 155656 Meter; und iſt mithin die geographiſche Breite des mittlern oder den Staat biſectirenden Parallels gerade 49 Grade.

Weicht nun jede der größten Ordinaten des Staates, als die Summe ſehr vieler Tangenten, §. 12., von ihrem Bogen nicht merklich ab, ſo mißt der Staat in ſeiner größten Ausdehnung von Oſten nach Weſten in dem Parallel von 49 Graden gerade $\frac{475288 + 511903}{73129}$ oder $13\frac{1}{2}$ Längengrade der Erde.

Setzt man dieſen wegen des Neben-Landes noch einen halben Grad, oder auf jeder Seite $\frac{1}{4}$ Grad bey, ſo erhält ſonach die Charte des Staates gerade 14 Längengrade; oder der Centerwinkel in der Erdaxe für die Ebene des Parallels von 49 Graden mißt für dieſen Staat 14 Längengrade; die ich nun in der Allgemeinheit mit (φ) bezeichne.

Nun

Nun ist ferner der Halbmesser des Aequators unserer Erde 6375740 Meter; und nach dem Maaßstab der Charte geben 256000 Meter gerade einen landüblichen Fuß; es paßt mithin die Charte für ein Ellipsoid zu, dessen Aequator $\frac{6375740}{256000} = 24,906$ Fuße bey einer Abplattung von $\frac{1}{334}$ ist.

Bezeichnet der Buchstabe (a) diesen Halbmesser, und (α) die geogr. Breite des mittlern Parallels des Staates von 49 Graden, so ist nach §. 2. I. der Halbmesser dieses Parallels $= a.\mathrm{Cos}\,\alpha : \sqrt{(1 - \varepsilon^2.\mathrm{Sin}\,\alpha^2)} = \mathrm{AO}$ in Fig.(37.) Auch ist $\log \varepsilon^2 = 0,7765700 - 3$; und $\log.\sqrt{(1 - \varepsilon^2 \mathrm{Sin}\,\alpha^2)} = 4,9992713 - 5$, nach §. 10. IV.

$$\log a = 1,3962905.$$
$$\log \mathrm{Cos}\,\alpha = 9,8169429 - 10.$$
$$11,2132334 - 10.$$
$$\mathrm{l.}\sqrt{(1 - \varepsilon^2 \mathrm{Sin}\,\alpha^2)} = 4,9992713 - 5.$$
$$4,2140621 - 3.$$
$$\mathrm{AO} = 16,329.\ \text{landübliche Fuße.}$$

2) Für das Ellipsoid ist nun auch der Halbmesser des in jenem Parallel ihre berührenden senkrechten Kegels $\mathrm{AE} = \frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{Sin}\,\alpha}$, nach §. 12. I.

$$\log \mathrm{AO} = 14,2139621 - 13.$$
$$\log \mathrm{Sin}\,\alpha = 9,8777729 - 10.$$
$$4,3362892 - 3.$$
$$\mathrm{AE} = 21,691.\ \text{Fuße.}$$

Setzt man nun den Centerwinkel $= (\psi)$, dessen Bogen mit dem Bogen (φ) des Parallels congruirt, so sind einmal diese Bogen selbst einander gleich; mithin $360 : \varphi = 2\pi.\mathrm{AO} : u$; und $360 : \psi = 2\pi\,\mathrm{AE} : u$;

$$\text{also } \frac{\varphi}{360}.2\pi.\mathrm{AO} = \frac{\psi}{360} : 2\pi\,\mathrm{AE};\ \text{und}$$
$$\psi = \frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{AE}}.\varphi.$$

log

$$\log AO = 4{,}2140621 - 3.$$
$$\log \varphi = 1{,}1461280.$$
$$5{,}3601901 - 3.$$
$$\log AE = 4{,}3362892 - 3.$$
$$1{,}0239009.$$
$$\downarrow = 10{,}59 \text{ Grade} = 10^\circ\,„\,35'\,„\,24''.$$
$$\tfrac{1}{2}\downarrow = 5^\circ\,„\,17'\,„\,42''.$$

Nimmt man ferner die Chorde des Winkels ($\downarrow$), so ist diese die lange Seite des Vierecks, welches um die Charte beschrieben werden soll.

Diese Chorde aber ist 2.AE.Sin.$\frac{1}{2}\downarrow$.

$$\log AE = 4{,}3362892 - 0.$$
$$\log \text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\downarrow = 8{,}9651249 - 10.$$
$$\log 2 = 0{,}3010300 - 0.$$
$$4{,}6024441 - 4.$$

Absolutzahl 4,0035. Fuße.

Letztlich ist die größte nördliche und südlichste Abscisse des Staates zu 428463 und zu 339532 Meter berechnet worden. Beide betragen daher 768000 Meter; welche $\frac{768000}{256000}$ oder 3 Fuße ausmachen.

Sonach müßte also die Vierung für die Charte in ihrer Längenseite 4,0035; und in ihrer kurzen Seite, oder in ihrer Höhe gerade 3 landübliche Fuße messen.

3) Ist auf diese Art die Vierung für die Charte berechnet, so kommt es nun darauf an, dieselbe auf dem Plan auch wirklich zu beschreiben, und nachgehends denselben auch gehörig zu graduiren.

Es sey deswegen in Fig. (39.) die Linie $\nu\mu$ die Meridianlinie eines Ortes A in (I.), nach welcher sämmtliche Coordinaten der Charte aufgetragen wurden; auf derselben sey A der Ort A selbst, dessen Polhöhe und Azymuth gemessen wurden; und MNE sey der mittlere Meridian der Charte, welcher ihre Vierung bisectirt.

Da

Da nun hier der Ort A außer jenem Meridian oder etwas excentrisch liegt, so muß die Lage desselben durch den Meridian $v\mu$ folgendermaßen bestimmt werden.

Nach (1.) ist nemlich die größte westliche und östliche Ordinate des Staates zu 511903 und zu 475288 Metern, mithin seine größte Ausdehnung von Osten nach Westen zu 987191 Metern bestimmt worden; wovon die Hälfte 493596 Meter macht.

Ziehet man von dieser Hälfte die kleinere östliche Ordinate mit 475288 ab, so verbleibet die Differenz von 18308 Metern, welche auf der Charte $A\alpha = \frac{18308}{256000}$ = 0,0715 des landüblichen Fußes, oder 71,5 des in 1000 Theile abgetheilten Fußes betragen.

Ferner liegt der Ort A nach (1.) auch um 155656 Meter, oder um $\frac{155656}{256000}$ = 0,6080 Fuße = Aa unter seinem mittlern Parallel von 49 Graden geographischer Breite südlich.

Trägt man daher aus dem Puncte A nach (v) gerade 1,5 + 0,608 oder 2,108 Fuße, und nach (μ) 0,892 Fuße abwärts, so sind die Puncte (v) und (μ) auf der Charte bestimmt, und es kommt nur noch darauf an, die Abstände Nv und $M\mu$ zu finden, um den mittlern Meridian der Charte ziehen zu können.

Nun ist aber der Halbmesser des mittlern Parallels von 49 Graden oder $E\beta$ = 21,691. Fuße nach (2.); mithin $E\alpha$ = 21,691 + 0,608 = 22,299; NE = 21,691 −2,108 = 19,583; EM = 22,583. Meter.

Auch ist $E\alpha : A\alpha$ = EN : Nv; also Nv = 0,062792 Fuße; und $M\mu$ = 0,072411. Fuße.

Man reisset daher aus v und μ kleine Cirkelbögen mit vN und μM, und ziehet durch dieselbe den mittlern Meridian ME; ziehet ferner mit EA den Bogen $A\alpha$;

und

und trägt aus α die 0,608 Fuße nach β, so ergiebt sich der Punct (β) für den mittlern Parallel der Charte von 49 Graden; von welchen aus 1½ Fuß aufwärts und abwärts auf dem mittlern Meridian getragen, die Puncte N und M selbst ergeben; durch welche nun senkrechte Linien auf EM gezogen werden.

Trägt man auf diese Linien aus N und M, rechts und links, 2,00175 Fuße, so ergeben sich die Puncte R„S und P„Q für die Vierung der Charte.

4) Hat der Geometer auf diese Art die Vierung auf der Charte aufgerissen, so schreitet er nun für ihre Graduirung selbst vor, indem er vorerst die Parallelkreise derselben ziehet.

In dieser Absicht träget er von dem Punct (β) auf dem Meridian für den Parallel 50° nach der Tabelle (1.) die $\frac{111205}{256000}$, von β nach γ auf; er trägt eben so von β nach (δ) die $\frac{111205 + 1111222}{256000}$ für den Parallel 51 Grad auf, u. s. w.; er trägt eben so die $\frac{111171}{256000}$ von β nach b für den 48 Parallel, abwärts, und bestimmt so ferner die Puncte c„d für 47„46 Grade u. s. w.

Letztlich verlängert er die Linie MN, und trägt von β nach E den Halbmesser des mittlern Parallels von 49 Graden, mit 21,691. Fußen; und bestimmt so in E das Centrum, aus welchem nachgehends mit dem Stangencirkel die Kreisbögen durch β„γ„δ„ε. b„c„d„e. gerissen werden.

Bey diesem Aufreissen der Parallelkreise der Charte kommt alles zunächst darauf an, daß der bestimmte Punct E aufs genaueste in der Verlängerung der Linien NM sich befinde: man kann daher die Richtigkeit der Parallelkreise controliren, wenn man für jeden Parallel den Quer-

sinus

sinus auf die Charte trägt, und durch denselben eine Linie auf der Charte parallel mit RS # PQ ziehet.

Für den Parallel von 49 Graden ist sein Quersinus βu; ziehet man daher durch (u) eine Linie parallel mit PQ oder RS, so schneidet diese die Vierung der Charte in den Puncten O„W; durch diese muß daher auch die Spitze des Cirkels aufs genaueste gehen, wenn der Parallelkreis wβo senkrecht auf EM gezogen seyn soll.

Man findet aber uβ aus der Gleichung für den Kreis; wornach ist

$uw^2 = 2E\beta.u\beta - u\beta^2$; und $u\beta = E\beta - \sqrt{(E\beta^2 - uw^2)}$.

Auf diese Art berechnet man auch den Quersinus jedes andern Parallels, und reisset so diese um so sicherer.

Man kann auch die Schiene des Druckcirkels nach den Puncten wβo spannen, und so an ihm den Bogen uβo ziehen, wo der Halbmesser so groß wäre, daß man den Bogen nicht mehr wohl mit einem Stangencirkel fassen könnte.

Theilet man jeden Grad zwischen βγ„γδ in mehrere gleiche Theile, und ziehet durch die Theilungspuncte blinde Bogen, so schneiden diese auf den Linien PR und RQ der Charten-Vierung, die Theile der breiten Grade der Charte ab.

Wollte der Geometer den Meridian vμ für den mittlern seiner Charte selbst gelten lassen, so müßte er an dieser außer dem Mittel des Landes, auf jener Seite noch so viel Nebenland in die Charte zeichnen, daß er zur Rechten und Linken desselben gleichviel Längengrade für die Charte erhält.

5) Was endlich die Aufreissung der Längengrade der Charte anbelangt, so muß der Geometer die geographische Länge des Meridians vμ wissen, nach welchem er die Coordinaten des Landes aufgetragen hatte; in soferne er diesen nicht für den ersten Meridian selbst gelten lassen will.

Es

Es sey nun die geographische Länge des Ortes A, nach einem gewissen für den ersten angenommenen Meridian = 28°„ 14′„ 22″.

Nehme ich nun den Parallel von 46 Graden zu 77420 Meter an, so machen die 14′„ 22″ gerade 18534 Meter; die auf dem Maaßstab der Charte $\frac{1}{2}\frac{3}{5}\frac{5}{6}\frac{3}{0}\frac{4}{0}$ oder 0,0724. landübliche Fuße messen; so daß deswegen der Meridian NM als der mittlere der Charte nach (4.) gerade der 28ste ist.

Ist nun dieser einmal nach seiner Numer bestimmt, so trägt der Geometer die $\frac{7}{2}\frac{7}{5}\frac{4}{6}\frac{2}{0}\frac{0}{0}$, oder 0,3024 landübliche Fuße auf den Parallel von 46 Graden von den Punct (d) nach f„ g zur Rechten und Linken so oft auf, als es angehet.

Da sich aber diese Distanz mit dem Cirkel nicht mathematisch richtig fassen läßt, §. 8. II., und der hiebey unvermeidliche Fehler um so größere Folgen für die Bestimmung der Längengrade der Charte hat, je öfter der Cirkel umgeschlagen werden kann, so thut man besser, wenn man die Chorde jedes Parallels für den Centerwinkel (ϕ) berechnet, und diese aufträgt; wornach man durch diese Bestimmung den Bogen selbst in seine Theile, hier in 7 Theile eintheilen kann.

Eben so verfährt man auch mit dem Parallel von 45„ 44.... 52 und ziehet am Ende durch die erhaltenen Puncte eine krumme Linie hmf für die Meridiane der Charte, deren Abstände Mo„ Nl auf der Vierungslinie PQ„ RS nachgehends in kleinere Theile abgetheilt werden.

Diese Zeichnung oder Eintheilung der Charte in ihre Breiten- und Längengrade heißt man auch das Conoidalnetz der Charte.

Je genauer nun dieses Netz auf die Charte aufgezeichnet ist, um so zuverlässiger lassen sich auf ihr die geogr. Breiten und Längen ihrer Orte ablesen.

6) Außer-

6) Außerdem mißt man auch die Entfernung der Orte auf der Charte, entweder nach Metern, oder landüblichen Fußen, oder auch nach geographischen, oder andern eingeführten Meilen.

Diese werden auf folgende Art am sichersten verzeichnet. Wollte man nemlich auf die Charte einen Maaßstab von 10000 Metern aufzeichnen, so legt man vorerst das Fundamentalverhältniß ihres Muttermaaßstabs zum Grunde, nach welchem 256000 Meter gerade einen landüblichen Fuß machen; und setzt $256000 : 100000 = 1 : x$; $x = 0,390$. Fuße.

Man nimmt daher auf dem in seine 1000 Theile abgetheilten landüblichen Fuße 390 Theile mit dem Cirkel ab, theilet diese durchs Bisectiren vorerst in 10, und jeden dieser Theile in so weit in kleinere Theile als es angehet, und bringt das Ganze in die Form eines Transversalmaaßstabs, dessen Transversalen noch kleinere Theile ansprechen.

Ist ferner der Halbmesser des Aequators unserer Erde $= a$. Meter: so ist sein Umfang $2\pi a$; und ein Grad desselben $\frac{2\pi a}{360}$.

Rechnet man nun 15 geogr. Meilen auf einen Grad, so mißt deswegen eine geogr. Meile $\frac{\pi . a}{180.15}$. Meter.

Für $a = 6375740$ ist nun

$$\begin{aligned} \log a &= 6,8045305. \\ \log \pi &= 0,4971498. \\ \hline & 7,3016803. \\ \log. 2700 &= 3,4313638. \\ \hline & 3,8703165. \end{aligned}$$

Absolutzahl $= 7418,5$.

Die geographische Meile würde daher 7418,5. Meter messen.

Will

Will man nun einen Maaßstab für 10 geogr. Meilen zeichnen, so nimmt man $\frac{7}{2}\frac{4}{5}\frac{1}{6}\frac{8}{0}\frac{5}{0}\frac{}{0}\frac{}{0}$, oder 0,2898 des landüblichen Fußes, oder 289,8 Theile desselben mit dem Cirkel ab, und theilet sie in 10 gleiche Theile oder Meilen; deren jede nachgehends durch Transversalen noch in beliebige kleinere Theile abgetheilt wird.

Weiß man das Verhältniß der geogr. Meile zu der landüblichen Meile, so kann man nach diesem Maaßstab, auch den für die landübliche Meile, und so auch für jede andere construiren.

b. Mißt der Staat in der Richtung von Norden nach Süden mehr Meilen, als von Osten nach Westen, so richtet sich die Graduirung seiner Charte, wie in (a.) nach dem Format des Papiers, auf welches die Charte gezeichnet ist.

Es addiret der Geometer die längste nördliche und südliche Abscissen, die er von dem Orte A aus berechnet hatte, zusammen, und vergleichet die Summe mit der Tabelle (IX.), um die größte Breiten-Differenz der Parallelen des Staates zu finden: er giebt wegen des Neben-Landes noch so viel zu, daß die nördliche und südliche Breiten-Differenz von dem mittlern Parallel aus, in ganzen Graden aufgehet, und bestimmt so die Höhe der Vierung der Charte.

Nach dieser Bestimmung berechnet der Geometer den Aequator der Ellipsoide nach landüblichen Fußen, welche seiner Charte zupassen soll (IX. 1.); er berechnet den Halbmesser des Kegels der Charte für den mittlern Parallel, und findet mit diesem auch die Halbmesser der übrigen Parallelkreise.

Da ferner der Staat von Osten nach Westen weniger ausgedehnt als von Norden nach Süden, mithin der Geometer wegen des Formats des Papiers für die Längengrade nicht verlegen ist, so nimmt er auf jeden

Fall

Fall den Meridian des Ortes A für den mittlern der Charte an (IX. 4.), und trägt auf beiden Seiten desselben so viel Längengrade auf den Parallelkreisen über, als den Format der Vierung ausfüllen, und füget am Ende den Maaßstab nach IX. 6. bey.

Abweichung des Conoidal-Netzes der Charte von ihrem Ellipsoidalen.

X. Nach der Construction des Conoidalnetzes der Charte (IX.), congruirt nun ihr mittlerer Parallel aufs genaueste mit dem gleichnamigen Parallel der Ellipsoide; und es sind die übrigen Parallelkreise der Charte aus dem nemlichen Mittelpunct (E) in Fig. (39.) gezogen, aus welchem der mittlere gerissen wurde.

Sollte nun das Netz der Charte nach seinen Parallelkreisen ihrer Ellipsoide aufs genaueste zupassen (IX. 1.), so müßte statt dessen jeder Parallel aus einem Centro gezogen werden, in welchem die Tangente des Parallels nach seiner geographischen Breite die verlängerte Axe des Ellipsoids durchschneidet: die Charte spricht also die geographische Breite ihrer Orte um so fehlerhafter an, je mehr der Parallel ihres Kegels, von dem Parallel ihres Ellipsoids für einen gegebenen Ort abweichet.

Es sey z. E. in Fig. (39.) die geographische Breite des mittlern Parallels wβo der Charte $= \alpha$, und sein Halbmesser $= \eta$ auf der Ellipsoide, welcher die Charte des Landes zupasset (IX. 1.); so ist einmal auch der Halbmesser des Kreises auf dem Kegel, welchen die Ellipsoide in jenem Parallel berühret oder $E\beta = \eta : \text{Sin}\,\alpha = f$.

Es sey ferner die geographische Breite eines Parallels $R{:}S = \beta$, sein Halbmesser $= z$; so ist $z : \text{Sin}\,\beta = K\varepsilon$; der Halbmesser dieses Kreises auf dem Kegel $= Kz$; auch sey die Längen-Differenz des Ortes U von dem mittlern

Meridian MN gleich (λ) Graden: so ist der Winkel $UE_s = \frac{n}{f}\lambda$. nach (IX. 2.) = E; und seine Breiten-Differenz $\beta_s = \beta - \alpha$. Grade, welche auf der Charte (G) Meter messen.

Da nun auf dem Ellipsoidalnetz der Parallel für die Breite von (β) Graden die Richtung Tz$_s$, statt daß er auf dem Conoidalnetz die Richtung RU$_s$ nimmt, so bestimmt deswegen dieses Netz die geographische Breite von U um den Theil zu fehlerhaft.

Wenn daher die Abweichung eines dieser Netze von dem andern berechnet werden soll, so kommt es darauf an, für einen Ort, dessen Breiten-Differenz von dem mittlern Parallel, und dessen Längen-Differenz von dem mittlern Meridian der Charte aus derselben bekannt ist, den Fehler zu finden, um welchen das Conoidalnetz seine Breite fehlerhaft angiebt; wozu ich folgenden Weg einschlage.

Auf dem Conoidalnetz ist einmal der Halbmesser des Parallels RU$_s$ gleich $UE = E\beta - \beta_s$; und nach Metern der Fehler

$$ZU = EU - EZ = E\beta - \beta_s - EZ.$$

Für die Charte (IX.) ist die geographische Breite ihres mittlern Parallels $\alpha = 49°$; und nach (IX. 2.) der Halbmesser dieses Kreises für das Conoidalnetz, oder $E\beta = 21{,}691$ Fuße. Ist nun die geographische Breite des Ortes U auf der Charte $52° = \beta$, und seine Längen-Differenz $\varphi = 7$ Grade von dem mittlern Meridian der Charte, so ist einmal $\beta - \alpha = 3$ Grade, und nach der Tabelle (IX. 1.), $\beta_s = \frac{111205 + 111222 + 111239}{256000} = 1{,}3034$ Fuße; mithin $UE = 21{,}691 - 1{,}3034 = 20{,}3876$ Fuße $= E_s$.

Ferner ist der Halbmesser des Parallels von 52° gleich 15,362 Fußen, und der Halbmesser, der ihm auf dem Kegel

Kegel zukommt, oder $K\varepsilon = 19{,}460$ Fuße; mithin EK $= 20{,}3876 - 19{,}4600 = 0{,}9276$ Fuße.

Auch ist der Winkel $UEK = E = \frac{16{,}329}{21{,}691} \cdot 7 = 5°\,16'$; und nach der analytischen Trigonometrie in dem Dreyeck EZK

$$EZ = EK.\mathrm{Cos}E + \surd(ZK^2 - EK^2.\mathrm{Sin}E^2)$$
$$= 0{,}9236 + 19{,}460 = 20{,}3836.$$

Sonach ist $ZU = 20{,}3876 - 20{,}3836 = 0{,}004$ Fuße.

Nun mißt aber auf dieser Charte ein Fuß gerade 256000 Meter, also messen die 0,004 Fuße 1024 Meter.

Da ferner in dem Parallel von 52 Graden ein Meridiangrad oder 3600 Secunden, 111239 Meter messet, so ist $UZ = 33$ Secunden; der Parallel auf dem Conoidal-Netz der Charte weicht also von ihrem Ellipsoidalnetz für den Ort U, der 7 Grade außer dem mittlern Meridian des Staates westlich in dieser Parallel liegt, um 33 Secunden ab.

Diese Abweichung ist für einen andern Ort, dessen Längen-Differenz kleiner ist, um so geringer, je kleiner diese Differenz ist; sie ist für die nemliche Längen-Differenz noch um so kleiner, je näher der Ort dem mittlern Parallel des Landes liegt, und je geringer die geographische Breite an und für sich ist.

Ich habe hier die Rechnung nach aller Schärfe für die Ellipsoide geführt, welcher die Charte zupasset; sie wird einfacher, aber weniger genau, wenn man statt des Ellipsoids eine Kugel substituiren wollte, deren Durchmesser das arithmetische Mittel zwischen dem Durchmesser und der Axe jenes Ellipsoids ist.

Abweichung des Abdrucks einer Charte von ihrem Original.

XI. Wenn die Sectionen einer Catastral- oder auch einer topographischen Charte, oder eine geographische

Charte selbst auf Kupfer oder Stein aufgetragen oder gebaußt werden soll, um von ihr mehrere Abdrücke zu gewinnen, so ist nun wohl der Reichenbachische Pantograph (VI.) hiezu am geeignetsten; weil er das eigentliche Fac Simile macht, wenn der Lythograph den Stiften aufs sorgfältigste auf der Zeichnung führet.

Wird statt dessen die Charte in Kupfer gestochen, so fähret der Kupferstecher mit dem Rothstein auf allen Linien und Zügen der Charte herum; er umfähret auch die Zeichen ihrer Ortschaften, legt die roth tingirte Charte auf den weißen Grund seiner Kupferplatte, und reibet nun dieselbe mit der Hand an, so daß sich ihr rother Contour auf dem weißen Grund abdrücket.

Diesem Abdruck fähret der Kupferstecher mit der Radirnadel nach, arbeitet nach demselben mit dem Grabstichel die Charte aus und setzt die Schrift bey.

Wird ferner die gestochene Charte unter der Presse abgedruckt, so giebt der Drucker dem Papierbogen eine gewisse Feuchte, legt dasselbe auf die Kupferplatte, und ziehet sie mit dem aufliegenden Bogen, zwischen Filzen, durch die Presse hindurch, wornach er den erhaltenen Abdruck seines Orts niederleget.

Nach dieser Behandlung drückt sich also der Stich der Charte auf das Papier in Umständen, wo es um so mehr hygrometrisch sich ausgedehnt hat, je feuchter es ist, §. 8. III.; es ziehet sich nachgehends um so mehr zusammen, je trockner es wird, und je größer an und für sich nach seiner Substanz, seine hygrometrische Veränderlichkeit ist.

Hätte nun das Papier keine Rippen, und änderte sich nach seiner Länge und Breite gleichförmig, so würde seine Zusammenziehung während seines Trocknens auf die Charte keine Folgen haben; weil sich mit dieser auch ihr Maaßstab ebenmäßig ändert: sie würde nur auf eine verhältnißmäßig kleinere Ellipsoide aufpassen.

Die-

Ziehet sich z. E. das Papier um $\frac{1}{60}$ zusammen, so würde der Abdruck der Charte einer Ellipsoide anpassen, deren Aequator $\frac{59}{60}$. 2. Fuße ist (IX. 1.).

Anderst verhält sichs dagegen, wenn das Papier des Abdrucks Rippen hat, die sich vor der übrigen Substanz stärker zusammen ziehen: es ändert sich die Dimension der Charte in der auf die Rippen senkrechten Richtung um so mehr, je mehr Rippen die Dimension überschneidet.

Laufen z. E. die Parallelkreise mit der Richtung der Rippen, so laufen die über und unter dem mittlern Parallel der Charte liegenden Parallelkreise um so mehr zusammen, je mehr sie nach dem Maaßstab der Charte, und nach ihrer Breitendifferenz Rippen überschneiden, und die Abstände der Orte in der Richtung von Norden nach Süden ändern sich dadurch um so mehr, oder werden um so kürzer; es werden die Abstände von Osten nach Westen um so kürzer, wenn die Charte so gezeichnet werden mußte, daß ihre Meridiane in die Richtung der Rippen fallen.

Um nun die Folgen der Zusammenziehung des Abdrucks auf die auf demselben zu messende Distanzen zu überschlagen, wähle ich folgenden Fall.

Bey der Charte (IX.), deren Vierung in der langen Seite 4 Fuß, in der kurzen 3 Fuß hat, laufen die Rippen nach der Richtung ihrer Meridiane; und die Charte lauft in ihrer langen Seite, welche 32 Rippen in sich faßt, um $\frac{80}{1000}$ des Fußes, nach der schmalen Seite aber nur um 48 : 1000 vor ihrem feuchtesten Zustand bei'm Abdrücken, bis zu ihrer gänzlichen Austrocknung ein.

Hätte nun das Papier eine gleichförmige Zusammenziehung, so würde es sich auf seiner langen Seite nur auf $\frac{4}{3}$, 48 oder 64 Theile zusammenziehen, statt daß es sich auf 80 zusammenziehet; der Unterschied 80—64 oder

16 trift daher auf die 32 Rippen, und es trift daher auf eine Rippe in die andere $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1000}$ oder $\frac{1}{2000}$ des landüblichen Fußes.

Nun mißt aber bey dieser Charte der landübliche Fuß 256000 Meter, mithin trift auf eine Rippe in die andere 128 Meter.

Ueberschneidet daher eine den mittlern Meridian der Charte senkrecht durchschneidende Linie 4 Rippen, so ist diese Distanz in dem trockensten Zustand des Papiers 512 Meter kürzer als in seinem feuchten Zustand; oder diese Distanz mißt von dem Original der Charte 512 Meters.

Auf diesem Abdruck ziehen sich daher die Meridiane um so flächer, je näher sie dem mittlern Parallel kommen, und je größer ihre Längendifferenz von dem mittlern Meridian ist.

Wollte man daher Abdrücke liefern, die dem Original so viel möglich ist, ähnlich bleiben, so müßte man auf solches Papier vorerst das Netz der Charte dergestalt zeichnen, daß man die Längendifferenz der Meridiane, um so viel größer macht, als sie für jeden Parallel, welchen sie durchschneiden, nachgehends einschwinden.

Man trägt sodann die Orte nach der Länge und Breite ein, die sie auf der Originalcharte wirklich haben, und trägt so die Charte auf das Kupfer, oder auch auf die Steinplatte über, von welcher nachgehends die Abdrücke gemacht werden.

Wo nach der Zeichnung die Parallelkreise einschwinden müssen, verfährt man mit diesen ähnlichermaßen.

Berechnung der Oberfläche eines Staates nach seiner geographischen Charte.

XII. Bey der Berechnung der Oberfläche eines Staates liegt immer die geographische Quadratmeile zum Grunde,

oder

der seine Oberfläche wird nach solchen Meilen ausgesprochen.

Soll sich nun das Flächenmaaß eines Staates nur nach seiner geographischen Charte ergeben, die als solche immer eine stark verjüngte Copie seiner Horizontal-Projection ist, so unterscheide ich zuvörderst den Fall, wo die Fläche unmittelbar aus der nach (VIII.) aufgenommenen Charte selbst berechnet werden soll, von jenem, wo überhaupt die Fläche des Staates aus einer geographischen Charte berechnet werden soll, wie man sie von ihm vorfindet.

a. Bey der erstern Charte weiß nemlich der Geometer, welcher sie aufgenommen hat, das Fundamental-Verhältniß, auf welches er sie fundirt hat, z. E. bey der Charte (IX.) geben 256000 Meter oder 877133 landübliche Fuße einen; mithin giebt ein Quadratfuß auf der Charte im Großen 75936229968 9 Quadratfuße, oder 40000 auf den Morgen gerechnet 18984057,492 Morgen.

Gehen nun 16129 Morgen auf eine geograph. Quadratmeile, so ist ein Quadratfuß der Charte das verjüngte Bild von 1177,014 geograph. Quadratmeilen.

Es berechnet daher der Geometer den Flächeninhalt seiner Charte innerhalb der Gränzen des Staates planimetrisch, nach dem in 1000 Theile abgetheilten landüblichen Fuße, und multiplicirt die sonach erhaltenen Quadratfuße, mit jenem Factor.

Hätte er z. E. den Flächeninhalt des Staates innerhalb seiner auf der Charte angezeigten Gränzen zu 10,52 Quadratfußen befunden, so ergäbe sich hieraus die Oberfläche des Staates selbst zu 1177,014 . 10,52 oder zu 12382,18728 geograph. Quadratmeilen.

b. Soll statt dessen die Oberfläche eines Staates nur nach seiner Landcharte, die sich von ihm vorfindet, berechnet

rechnet werden, so genüget es immer, den Staat selbst als ein Stück der kugelartigen Erde anzusehen, weil solche Charten nach ihrer starken Verjüngung seine Fläche niemalen so genau angeben können, daß es der Mühe werth wäre, die Rechnung für das Ellipsoid zu führen.

Ich berechne in solchen Fällen die Charte am sichersten nach ihrer Graduirung oder nach ihren Quadratgraden; und gleiche jene Stücke, die über die Graduirung hinaus reichen, durch ihr Gewicht aus; oder ich schätze sie auch nach einem auf Oel getränktem Papier gezeichnetem Quadrangular-Netz.

Was nun zuvörderst den Quadratgrad anbelangt, so verstehe ich unter demselben immer die Fläche, welche für einen Längengrad durch zwey Parallelkreise abgeschnitten wird, deren Breiten-Differenz gerade ein Grad ist.

So ist z. E. für den Parallel von 52 und 51 Graden der Längengrad 9,234 und 9,440; also der Quadratgrad für diese Zone

$$15 \cdot \left(\frac{9{,}234 + 9{,}440}{2}\right) = 140{,}055$$ geogr. Quadr. Meilen.

Deckt nun die Charte in dieser Zone gerade 6 Quadratgrade ganz, so ist der Inhalt derselben 840,330 Quadratmeilen.

Eben so werden auch die Quadratgrade für die Zone zwischen 51 und 50, zwischen 50 und 49 u. s. w. bis 46 und 47 für jene Charte berechnet.

Um ferner auch die Fläche jenes Landes zu finden, das keinen ganzen Quadratgrad deckt, zeichne ich mir auf feines Papier ein Quadrat, dessen Seite dem Abstand der Parallelgrade der Charte oder 15 Meilen ist, und theile dieselbe in 15 gleiche Theile, wornach auf diesem Quadrangularnetz ein Quadrat gerade eine Quadratmeile deckt. Wird dieß Netz nachgehends mit Oel getränkt, und auf

die

die Charte gelegt, so kann man die Quadratmeilen zählen und schätzen, welche seines Orts die Fläche mißt, die keinen ganzen Quadratgrad erfüllet.

Summiret man die Quadratgrade jeder Zone der Charte, und addiret und subtrahiret nach Umständen die überschüssigen oder defecten Theile, so ergiebt sich hieraus die Oberfläche des Staates selbst um so genauer, je sorgfältiger man bey einem guten Augenmaaß das Quadrangularnetz anwendet.

c. Statt dessen lässet sich auch das Flächenmaaß der überschüssigen und defecten Theile durch eine feine Probierwaage finden.

Man zeichnet nemlich diese Stücke auf der Charte auf feines Papier durch, das man auf sie leget, schneidet sie mit der Scheere scharf aus, wiegt die überschüssigen und defecten Theile auf beiden Waagschaalen gegen einander ab, um das Gewicht jener zu finden, welche das Flächenmaaß der Charte außer ihren Quadratgraden vermehren helfen.

Nun zeichnet man auf dem nemlichen feinen Papier ein Quadrat, dessen Seite 15. μ. Meilen mißt, wiegt dieses aufs genaueste, und proportioniret nun sein Gewicht zu dem Gewicht jenes Ueberschusses der Stücke.

Mißt z. E. die Seite des Quadrats = 3 Parallelgrade der Charte oder 75 Meilen und sein Gewicht (p) Grane, jener Ueberschuß aber (q) Grane; und hält jener Ueberschuß (x) Quadratmeilen; so ist

$$p : q = 5625 : x;\quad x = \frac{q}{p} 5625 \text{ geogr. Quadr. Meilen.}$$

§. 13.

§. 13.

Aufnahme eines Staates, der ein Continens von Waldungen ist.

Ist der Staat innerhalb seiner Gränzen ganz mit Wäldern bedeckt, in welchen seine Städte, Dörfer und Einöden mit ihren Fluren liegen, so ist seine Aufnahme immer um so schwieriger, je weniger seine Berge eine freie Aussicht über seine Gaue gewähren; es ist seine Aufnahme am mühsamsten, wenn der Staat selbst eine ausgebreitete mit Wäldern bedeckte Ebene ist, die nur hin und wieder detaschirte bewachsene Hügel hat.

Die geographische Charte eines solchen Staates kann daher auch nicht jene Genauigkeit gewähren, die man von andern, nach der Triangular oder sonst in §. 8. angeführten Methoden sich versprechen kann; man muß sich öfters begnügen, wenn die Lage der Orte auf ihr in soweit richtig ist, als die Möglichkeit der Sache in Anwendung des größten Fleißes und Sorgfalt mit sich bringt.

Sollte nun ein dermaßen mit Wäldern bestocktes ebenes Land aufgenommen werden, das schlechterdings keine Aussicht nach seinen bewohnten Gründen gewähret, so müßte man meines Erachtens vorerst die durch das Land führende Landstraßen polygonometrisch §. 7. aufnehmen, und von diesen aus die Seitenwege verfolgen, welche nach den bewohnten Plätzen führen.

a. Dabey ist es nun räthlich, jene Straße zuerst aufzunehmen, welche das Land in seinen Gränzen beinahe mitten durchschneidet; und selbst auf dieser Straße, die Messung beiläufig in ihrer Mitte beginnen; damit die bey der Messung unvermeidlichen Fehler sich am wenigsten anhäufen, oder sich in die Hälften zertheilen.

Wäre

Wäre z. E. ECBAFGH diese Straße, in Fig. 40. Tab. III., so könnte ihre Aufnahme in der Stelle A anfangen, und so zuvörderst nach E hin, oder auch nach H fortgesetzt werden, je nachdem man den einen oder den andern Theil des Landes vorerst aufnehmen will.

Bey dieser Aufnahme muß man ferner darauf antragen, die Straße vorläufig mit dem Compas zu recognosciren, und insbesondere sich dabey an ihre Hauptwendungen in A„ B„ C„ D„... halten. Man stecket an solchen Straßen Signalstangen auf, und bemühet sich von einer derselben zur andern eine gerade Linie AB„ BC„ CD... durch Fluchtstangen abzustecken, welche alle kleinere Wendungen der Straße, wie z. E. in (a) abschneidet, die man nachgehends durch die Ordinate ba mißt; damit man die Zahl der aufzunehmenden Winkel, und der zu messenden Linien möglichst reducirt; und dadurch die Aufnahme selbst um so zuverlässiger macht.

Ziehet sich in dem Staate eine andere Haupt- oder Landstraße in der Richtung c d e f g i k l m und eine andere s. t u C v w c fort, welche jene in C und diese in (c) durchschneidet, so muß der Geometer darauf antragen, auch diese zunächst aufzunehmen, ehe er sich noch um die jenen Straßen zur Seite liegende bewohnte Orte umsiehet.

Er trägt daher darauf an, zunächst eine schickliche Verbindung zwischen beiden Straßen herzustellen, und nimmt deswegen den Vicinalweg B h g nach (lit. a.) auf, der beide Straßen mit einander verbindet; er arbeitet sich durch Traversen §. 7. durch den Wald auf dem nächsten Wege von B nach (g) hindurch, wenn er keinen Fahrweg auffinden kann, der die Verbindung beider Straßen herstellet; und bestimmt so auf seinem Meßtisch den Verbindungspunct oder Bund (g) für die Straße c g m.

Die-

Diese Verbindung beider Straßen, mit ihren eigenen in (c) gewähret nun dem Geometer eine eigene Section I., die er auf seinem Meßtisch als eine isolirte erhält, indem er die Straßen von C über v„w„c, und von (g) über f„c„d„e. aufs sorgfältigste aufnimmt; und über welche er rücksichtlich ihres Schlusses in (c) die vorläufige Probe machen kann.

Ist dieser gehörig ausgefallen, so schreitet nun der Geometer für die Aufnahme des Details der Section I. selbst vor.

Führet z. E. ein Weg aus dem Puncte d derselben nach dem Orte (γ), so nimmt er diesen auf: oder er arbeitet sich nach dem Orte durch Traversen hin, wo ihm der Weg abgehet, und bringt so den Ort γ auf seinen Meßtisch. Eben so verfährt er auch mit den Orten (α) und (β). Können mitunter von den Hauptstraßen, durch Schläge, welche in dem Wald eingelegt sind, Visionen nach in demselben liegenden Objecten genommen werden, so unterläßt der Geometer nicht, solcher Visionen so viele auf seinem Meßtisch zu ziehen als sich vorfinden; weil ihm solche Linien dienen können, die Lage der Puncte zu prüfen, für Objecte, welche er durch Traversen bestimmen mußte.

Eben so nimmt auch der Geometer die Sectionen II. und III. welche sich durch das Ueberschneiden der Straßen- und Fahrwege, oder auch durch ihre Verbindung durch Traversen ergeben, nach und nach isolirt, oder jede für sich auf; und mißt nachgehends in jeder derselben, die in sie fallenden bewohnten Orte, und sonstige Etablissements und Gegenstände ein, welche instructionsmäßig in die Charte eingetragen werden müssen: er zeichnet außerdem in die Section das Topographische ihrer Ansicht, und verfährt rücksichtlich des Laufes der Flüsse und Bäche,

ent-

entweder nach dem Augenmaaß, oder er bestimmet auch für dieselbe ein und andern fixen Punct, zwischen welche er das übrige einzeichnet. §. 7. IV.

Nach dieser Methode, die Charte eines ebenen waldichten Landes aufzunehmen, kommt also alles darauf an, daß der Geometer dasselbe am schicklichsten in gewisse Sectionen abtheilet, die sich zunächst aus den Richtungen seiner Landstraßen, seiner Flüsse, oder was sonst sich signalisiret, ergeben, die nach Umständen auch durch Traversen mit einander verbunden werden; es gehet dabey der Geometer von den mittlern für das Land sich ergebenden Sectionen aus; er reihet eine derselben an die andere auf seinem Meßtisch an, und verfähret bey der Zusammensetzung oder bei'm Anschluß der Blätter nach Maximen, welche die elementare Geodäsie vorschreibet.

Es wird auf jeden Fall die Zuverlässigkeit der aufgenommenen Charte um so geringer, je mehr sich nach der Ausdehnung des Landes Sectionen an und neben einander anschließen müssen.

b. Wollte der Geograph, welcher die Aufnahme des Landes durch die ihm untergeordneten Geometer, dirigiret, durch dasselbe eine Directionslinie nach §. 11. II. nach und nach, oder Absatzweise durchhauen lassen, die seine Landstraßen und Flüsse überschneidet, so könnten die Geometer von dieser Linie aus, zur Rechten und Linken operiren.

Eine solche Linie, welche nachgehends gemessen wird, würde den großen Vortheil gewähren, daß alle und jede Puncte, welche in sie fallen, auch auf der Charte in gerader Linie eingetragen werden, mithin die Charte in dieser Richtung sich nicht verschieben kann. Es erhalten außerdem solche Objecte ihre Abstände auch auf der

Char-

Charte in so weit richtig, als ihre Abstände selbst mit der Kette zuverlässig gemessen werden können.

Außerdem können auch jene Sectionen, welche diese Linie selbst unmittelbar durchschneidet, um so genauer aufgenommen werden, als ihre Schlußwinkel von dieser Linie aus selbst aufgenommen werden können: es gewinnt dabey noch die Aufnahme der an diese sich anreihenden Sectionen um so mehr an Zuverlässigkeit, je zuverlässiger jene nach der Directionslinie selbst aufgenommen werden können.

Könnte man zwey Directionslinien ziehen, die sich in der Mitte des Staates durchschneiden, so könnte man ihre Neigung auf beiden Seiten ihres Durchschnittes durch Traversen messen; und die Charte würde dadurch um so zuverlässiger ausfallen, je weiter jene Linien an den Gränzen des Landes aus einander gehen.

Uebrigens kann der Geograph auch, durch die Bestimmung der geographischen Breiten ein und anderer Gränzorte, die Richtigkeit der Charte einigermaßen prüfen; wenn er diese durch Multiplicationswinkel bis auf $\frac{1}{2}$ Secunde genau messen kann.

c. Wäre das mit Wäldern bestockte Land nicht eben, sondern statt dessen gebirgicht, oder bestehet es aus detachirten und andern, eine Kette bildenden, mit Holz bewachsenen Bergen, so nehmen die Geometer, seine Thäler nach den nemlichen Maximen auf, die in (lit. b.) für die Landstraßen angeführt wurden! Sie tragen dabey darauf an, das Land in Sectionen einzutheilen, die seine Thäler unter sich bilden; und reihen so eine an die andere an, indem sie dabey so viel möglich ist, von der Mitte des Landes ausgehen; um die Folgen der unvermeidlichen Fehler möglichst zu reduciren.

Eine

Eine durch das Land gezogene Directionslinie §. 9. II. könnte dabey die nemlichen Dienste wie in (lit. b.) leisten, wenn sie auch nicht unmittelbar mit der Kette gemessen werden könnte.

Insbesondere aber kommt rücksichtlich des topographischen einer solchen Charte, alles auf richtige Bestimmung der Lage der Kuppen der prädominirenden Berge, oder der auf ihnen entspringenden Quellen der Flüsse, und auf die kettenartige Verbindung der bewachsenen Bergrücken vorzüglich an; welche folgendermaßen am füglichsten bestimmt werden können.

Es sey z. E. in Fig. 40. Sect. III., in (α) die Kuppe eines mit Holz bewachsenen Berges, oder einer auf ihm entspringenden Quelle eines Flusses.

Diesen Punct nun auf der Charte zu bestimmen, stecket der Geometer mit seinen Absteckstangen eine Verticalebene in einer Richtung, in welcher er durch das Holz am beßten durchkommen kann, thalwärts ab, welche in der Stelle β eine Linie schneidet, die er im Thale für die Constitution einer Section mißt.

Ist nun der Berg von α bis δ mit Holz bewachsen, so schneidet der Geometer den Punct (δ) durch die Basis βγ vorwärts ab; und mißt nachgehends die Linie αδ noch vollends mit der Kette, nach der Staffelmessung.

Verfähret er nun eben so auch mit andern Kuppen, so kann er durch die sonach für sie erhaltenen Puncte den Bergrücken ziehen, der sich von einer zur andern erstreckt, und also die Bergwände selbst nach ihren Abstufungen in die Charte einzeichnen oder schraffiren.

§. 14.

§. 14.

Aufnahme eines Staates, der ein Continens von Hochgebirgen ist.

Vorläufige Bemerkungen über die Aufnahme eines solchen Staates.

I. Soll eine topographische Charte von einem Staat aufgenommen werden, der aus lauter Hochgebirgen bestehet, so hat man außer der Absicht, welche im Ganzen bey der Aufnahme eines jeden Staates zum Grunde liegt, insbesondere die Nebenabsicht, die Lage der Spitzen seiner einzelnen und in ihren Wurzeln zusammenhängenden Berge, oder die Richtung der Bergketten, mit den zwischen ihnen liegenden Schluchten, Halten, Thälern, zu bestimmen; um von dem Staate ein Bild in seiner topographischen Charte zu entwerfen, das in seiner schraffirten Ausarbeitung dem großen Ganzen möglichst ähnlich ist!

Wenn nun die Aufnahme eines Staates, der aus lauter Waldungen bestehet, §. 13., die Absteckung gerader Linien bey der Transversalmessung in soweit nicht erschweret, als das Holz in solchen holzreichen Staaten, bei'm Durchhauen gerader Linien nicht sonderlich geschont werden darf, so macht bey solchen Staaten, die ganz Hochgebürg sind, die Detaschirung ihrer Berge, und der Continens ihrer Bergketten, die Ziehung langer gerader Linien meistens unmöglich; man kann die Transversalmessung nur in den Thälern anwenden, und diese polygonometrisch aufnehmen; und selbst diese Aufnahme wird um so unsicherer, je mehr man nach dem öfters sehr ansteigenden und wieder abfallenden Terrain der Thäler, die Staffelmessung anwenden muß; sie wird noch um so unsicherer, je öfter sich die Straßen um

Berge

Berge schlangenförmig herum wenden, und deswegen neben der immer unsicheren Staffelmessung auch eine gedrängte Winkelaufnahme nothwendig machen, je öfter solche Straßen sich um die Berge krümmen.

Wenn man daher auch das Land selbst in Sectionen abtheilen wollte, so wie sie der natürliche Zusammenhang seiner Thäler von selbst ergiebt, und diese Sectionen, wie in §. 13., einzeln mit dem Meßtisch aufnehmen, und sonach die Charte selbst aus ihren Sectionen zusammensetzen wollte, so könnten sich bey dem speciellen Schluße jeder Section so große Differenzen vorfinden, daß nach ihren Folgen auf das Ganze, die Charte eine Form annehmen müßte, die dem Lande auffallend unähnlich wäre.

Ganz anders würde sichs statt dessen verhalten, wenn man eine Dreyeckreihe von Haupt- und Secondair-Dreyecken über den Gipfeln der obern meistens kahlen Berge eines solchen Staates verbreiten, und durch dieses mehrere seiner bewohnten Orte in den Thälern trigonometrisch bestimmen könnte.

Man könnte nemlich in diesem Fall die aufzunehmende Charte, wie jede andere, in ihre Sectionen eintheilen, §. 12., in welche die bestimmten Orte durch ihre Coordinaten eingetragen werden; und so von einem solchen bestimmten Ort zum andern, die übrigen Orte, mit dem, was sonst Gegenstand der Charte ist, mit dem Meßtisch aufnehmen.

Sollten ferner die bewohnten Orte eines solchen Staates von dem Sürfas der Meere so weit abliegen, daß ihre auf den Sürfas reducirten Distanzen, merklich von ihren wirklichen abweichen müßten, so könnte man für dasselbe eine Horizontalebene wählen, in welcher nach barometrischen Beobachtungen die meisten bewohnten Orte eines solchen Staates lägen; oder auch, die zwischen den höchsten und niedrigsten Orten das Mittel hält.

Alles kommt daher bey der Aufnahme eines solchen Staates, dem Geographen zunächst darauf an, eine schickliche Grundlinie auszuwählen, auf welche er sein Dreyeecknetz fundiret.

Wo nun diese nicht in den Ebenen eines benachbarten Staates, oder auch, durch Distanzbestimmungen zweier Berge, welche bey der geographischen Aufnahme eines benachbarten Staates bereits ausgeführt wurde, mit genüglicher Zuverlässigkeit profitirt werden kann, bleibt dem Geographen kein anderes Mittel übrig, als seine Grundlinie im Gebirge selbst aufzusuchen, wobey sich ihm aber um so mehr Schwierigkeiten zeigen, je enger die Thäler, und je höher die sie constituirende Berge an und für sich sind; je weniger ferner das öftere Wenden der Thäler, die Messung einer langen Grundlinie zulassen, je abwechselnder ihr bald steigend- bald fallendes Terrain ist; und je weniger selbst die Alpen eine lange Grundlinie zu messen verstatten: es wird auf jeden Fall die Aufnahme der Charte um so unzuverlässiger, je kleiner man die Grundlinie annehmen muß, je unsicherer diese selbst zu messen ist, und je ungeeigneter ihre Lage für die Bestimmung der ersten durch sie herzuleitenden Distanz an und für sich ist.

Geschäftsgang bey der Aufnahme selbst.

II. Kann daher der Geograph von außen oder in dem angränzenden Staate, keine Grundlinie profitiren, und muß deswegen auf eine oder die andere der oben angeführten Arten, eine Grundlinie bestimmen, so muß er vorerst die genaueste Kundschaft von Männern einziehen, deren Beruf als Gemsjäger es mit sich bringt, die Gebirge des Landes zu erklimmen.

Er muß deswegen, bevor er das Recognosciren §. 4. III. selbst beginnet, sich erkundigen, welches die höchsten Berge im Lande sind, von welchen man die weiteste Aussicht hat, in wieferne, und ob sie für Menschen, welche seine Instrumente und Gepäcke tragen müssen, zugänglich sind, oder bis auf ihren Gipfel erstiegen werden können — wie groß die Plattform ihrer Gipfel seye, und ob man auf derselben Instrumente mit Sicherheit aufstellen, und ohne äußerste Gefahr Beobachtungen anstellen könne — in welchen Monaten diese Berge am füglichsten zu besteigen sind — von welchen Bergen man insbesondere in die bewohnten Thäler des Staates die beßte Aussicht hat — auf welchen Bergen die vorzüglichsten Quellen der Flüsse entspringen u. d. gl.

Diese vorläufige Notizen sind dem Geographen in soweit nützlich, daß er durch das Besteigen solcher Berge, die ihm für seine Operationen wenig nützen können, nicht unnöthiger Weise die Zeit verschwendet und sich anstrenget: er beginnet erst nach reifer Erwägung der Umstände das Recognoscirungsgeschäfte, wobey er sich mit einem Reisebarometer, und kleinen Winkelmesser versiehet, mit welchem er die Winkel nur beiläufig mißt, welche Gegenstände ihres Orts mit einander machen, auf welche er nachgehends seine Operationen gründet.

Er besteiget bey diesem Geschäfte die höchsten Berge; errichtet auf solchen, welche er durch jene bestimmen will, von Steinen aufgehäufte Signale, §. 4. IV., wo die Spitzen solcher Berge an und für sich nicht genug kennbar, oder sonst in ihren Plattformen zu breit sind, um das Fernrohr nach ihnen scharf genug richten zu können, §. 3.: er bemerket allda den Stand des Barometers und Thermometers, und überschlägt die Winkel, welchen allda die Spitzen anderer Berge und bewohnte Orte mit einander machen.

Eben so verfähret er auch auf solchen Bergen, von welchen man die beßte Aussicht in die Thäler hat; und träget darauf an, für jedes Thal immer zwey Berge auszufinden, von welchen aus, man diese Gegenstände noch mit gehöriger Genauigkeit abschneiden oder bestimmen kann.

Insbesondere aber trägt der Geograph bey dem Recognosciren darauf an, unter den vorfindlichen Alpen, jene auszufinden, die sich am schicklichsten für die Messung der Grundlinie eignet: er wählet diese so viel möglich ist, in der Mitte des Landes, damit nachgehends die bey der Aufnahme selbst unvermeidlichen Fehler sich um so besser zertheilen.

Während dieses Geschäftsganges unterhält der Geograph sich mit dem Meteorologen in Correspondenz, welcher seines Orts täglich in bestimmten Stunden, den Barometer- und Thermometer-Stand zu beobachten beauftragt ist, um aus der Vergleichung jener Beobachtungen mit seinen eigenen auf den Bergen, und insbesondere in den Thälern gleichzeitig angestellten Beobachtungen, das Nivellement der Thäler kennen zu lernen, und nach demselben die Horizontalebene auszugleichen, auf welche er das Land projiciren will.

Es macht sich eben so der Geograph einen rohen Entwurf von den Dreyecken, welche sich ihm nach jener bei'm Recognosciren angestellten rohen Winkelmessung ergeben haben; um vorläufig die Form seiner Haupt-Triangularreihe kennen zu lernen, und unter diesen jene auszuwählen, auf welche er in der Folge am sichersten bauen kann. §. 8.

Nach Beendigung des Recognoscirens nimmt nun der Geograph zunächst auf jenen Bergen die Winkel mit seinem Geodoliten aufs schärfeste, in Zeiten, wo diese am zugänglichsten sind; er nimmt nach diesem die Winkel auf den übrigen Standpuncten seiner Hauptdreyeckreihe:

er

er mißt seine ausgesuchte Basis, nimmt die mit derselben nöthwendigen Correctionen §. 10. II. vor, berechnet nach derselben seine Dreyeckreihe, und nimmt nun auf einem beinahe in der Mitte des Staates liegenden Orte seine Polhöhe und ein Azymuth, um sein Hauptdreyecknetz orientiren, und für die bestimmten Puncte desselben ihre Coordinaten berechnen, und nach diesen den provisorischen Entwurf des Netzes fertigen zu können; nach welchem nachgehends die Eintheilung der Charten-Sectionen regulirt wird.

War es dem Geographen möglich, ein Terrain für eine Verificationsbasis auszufinden, so messet er auch diese gleichzeitig mit der primitiven, controliret seine Dreyecke durch beide, und berechnet nach dieser Controle die Ordinaten seiner bestimmten Puncte, die er nun mit den ihnen zugehörigen Seiten den Geometern mittheilet, welchen er die Aufnahme der Secondair-Dreyecke überträgt.

Diese nun tragen von ihrer Seite zunächst darauf an, die Lage der Gipfel der isolirten Berge, so wie solcher, welche in ihren Wurzeln zusammen stoßen, und die Gebirgketten formiren, so wie insbesondere die in den Thälern liegende bewohnte Orte, und die Lage solcher Objecte durchs Trianguliren vorerst zu bestimmen, die instructionsmäßig in die Charte aufgenommen werden müssen: sie berechnen für diese Puncte ihre Coordinaten, und tragen sie nach denselben in die Sectionen ein, in welche die Charte, nach dem Ausschlag des Geographen, eingetheilt wird. §. 12. IV.

Sind nun auf diesem Wege in einer Gegend des Staates, so viel als möglich war, fixe Puncte für die dieser Gegend zukommliche Sectionen trigonometrisch bestimmt, und auf die Sectionen oder Tischblätter des Meßtisches gehörig aufgetragen worden, so schreitet nun der

Geo-

Geometer, welchem diese Gegend übertragen ist, für die topographische Aufnahme seiner Sectionen selbst vor; und bearbeitet dieselbe dermaßen instructionsmäßig, daß die Section auf dem Papier, der ihr entsprechenden Section im Großen, nach den Abständen und Lagen der Gegenstände, und nach der Ansicht des Ganzen und im Detail möglichst ähnlich wird.

Aufnahme einer Section der Gebirgcharte, wenn in derselben mehrere trigonometrische Puncte gegeben sind.

III. Sind nun durch das Trianguliren auf den Bergen, in den Thälern des Hochgebirgs so viel als immer möglich war, bewohnte Orte abgeschnitten oder bestimmt, und durch ihre Coordinaten in ihre Sectionen eingetragen worden, so kommt nun alles darauf an, diese Puncte gehörig mit einander zu verbinden.

Diese Verbindung geschiehet nun immer am füglichsten mit dem Meßtisch nach der Transversalmethode, §. 7.; wobey der Geometer seinen Meßtisch auf dem Anfangspunct gehörig orientiret, und nun übrigens alles und jedes aufnimmt, was an den Berghängen, an Einöden, Sennerhütten, Eingängen oder Luggen für Schachte, Steinbrüchen u. d. gl. Gegenstand des topographischen der Charte ist; so wie er die Berge selbst in ihren Abstuffungen, Alpen, Hörnern, instructionsmäßig einzeichnet und schraffiret.

Je mehr daher für die Thäler, auf den Sectionen der Charte bestimmte Puncte eingezeichnet sind, um so einfacher und sicherer werden die Arbeiten des Geometers; er muß in Fällen, wo bestimmte Puncte fast um die Länge oder Breite seiner Section, oder seines Tischblatts aus einan-

einander liegen, gewiße Maximen einschlagen, welche seinen Arbeiten die möglichste Sicherheit verschaffen helfen.

Diese bestehen nun darinnen, daß der Geometer wechselseitig von einem zum andern hin sich arbeitet, so daß der Schluß seiner Figur beinahe in die Mitte kommt.

Wären z. E. in Fig. 40., E und F, die an beide Ränder der Section fallende Puncte, so nimmt der Geometer das Thal von E nach B polygonometrisch, und nachgehends von F nach B auf; wobey der Punct für B in jenen fallen sollte, der sich für ihn auf dem Tischblatt aus der ersten Messung ergab.

Wo nun die Differenz bey weitem größer ist, als daß sie von unvermeidlichen Fehlern des Geometers herkommen könnte, berichtet dieser an den Geographen, welcher die Puncte E und F zu verificiren hat: ist dieses aber nicht, so liegt die Differenz in der Folge der bey den Staffelmessungen, Winkelaufnehmen, und in der Veränderlichkeit des Papiers unvermeidlichen Fehlern; und wird gewöhnlich bisectiret.

Ehe daher der Geometer diese Probe gemacht hat, läßet er daher auch die Detail-Aufnahme des Thales beruhen; er bemerket nur da und dort die Stellen durch Pflocken, und durch Puncte auf dem Meßtisch, aus welchen er nachgehends die Detailaufnahme am füglichsten vollführen kann.

Aufnahme einer Section, die keinen trigonometrisch bestimmten Punct erhalten konnte.

IV. Sollte es sich treffen, daß es schlechterdings dem Geographen unmöglich wäre, für eine, zwischen andere hineinfallende Sectionen, auch nicht einen einzigen trigonometrischen Punct zu bestimmen; so

kann

kann der Geometer dieselbe auf folgende Art zwischen die benachbarten interpoliren oder einschalten.

Es sey in Fig. 41., die Section λ μ ϱ ζ, welche keinen bestimmten Punct erhalten konnte. Nun ist aber in der zur linken liegenden Section der Punct (x) trigonometrisch, oder auch durch die Transversalmessung bestimmt worden.

Ziehet nun der Geometer die Traverse x „ von dem Gegenstande X zu dem Y, so schneidet diese den innern Rand dieser Section in o; legt nun der Geometer seine Meßregel allda auf den Rand λ μ auf, so kann er sich in der Richtung nach λ einen Stab P und in der Richtung o μ rückwärts einen Stab Q in der nemlichen Verticale einrichten lassen; so daß die Stäbe P „ Q „ und der in o geschlagene Pflocken in gerader Linie liegen.

Bringt nun der Geometer seine leere Section an diese Stelle, so zeichnet er zuvörderst den Punct o auf ihren innern Rand, indem er von der benachbarten den Abstand o μ auf diesen überträgt.

Er stellet nun seinen Meßtisch so, daß der Punct o der leeren Section genau über dem Pflocken O zu stehen kommt, legt seine Regel über der innern Randlinie an, und drehet den Tisch so lange, bis die Absteckstäbe P und Q in die Visierlinie der Regel fallen: trift nun dieses aufs genaueste zu, so ist die Lage der leeren Section parallel mit der benachbarten; und der Geometer kann nun von o nach „ zu operiren anfangen, und seine Transversalmessung bis zur Hälfte z seiner Section fortsetzen.

Stellet er nachgehends eben so auch den Rand ζ ϱ seiner Section parallel mit der anstoßenden, so kann er von da aus, rückwärts weiter nach z sich hinarbeiten; und nachsehen, wie beide Puncte für z mit einander zusammen treffen (a).

Eben

Eben so verhält sichs auch, wenn mehrere zusammenstoßende Sectionen leer ausfallen mußten; nun wird ihre Zuverlässigkeit um so geringer, je mehr solche Arondissements nach einander vorgenommen werden müssen.

Es ist daher bey solchen Gebirgmessungen immer räthlich, die Geometer, welche die einzelnen Sectionen mit dem Meßtisch aufnehmen, dergestalt zu vertheilen, daß jeder ein ganzes Gau für sich erhält, das er allein aufzunehmen hat; damit er seine Tischblätter oder Sectionen gehörig unter sich verbinden kann.

§. 15.

Die sphärische Aufnahme eines Staates.

Wenn der Geograph einen Staat nach den Principien der sphärischen Trigonometrie aufnimmt, so überzieht er ihn mit einem Dreyecknetz, dessen Seiten unmittelbar in dem Seehorizont unserer Erde selbst liegen, §. 10. IV.; statt dessen bey der Aufnahme des nemlichen Staates nach der geradlinichten Trigonometrie die Seiten der nemlichen Dreyecke, den Wasserpaß als eigentliche Tangenten nur berühren; und dabey die wahren Distanzen der Orte, welche sie vorstellen, um so fehlerhafter angeben, je mehr die Summe ihrer sphärischen Winkel, von der Summe der geradlinichten abweichen; oder je größer ihr sphärischer Exceß §. 2. X. ist.

Die sphärische Aufnahme eines Staates ist daher der natürlichen Lage seiner Orte am angemessensten; da jeder Winkel der Dreyecke, welche sie unter sich verbinden, seiner Natur nach ein sphärischer Winkel ist; und die Abstände der Orte unter sich selbst Bogen einer Sphäre sind, welche den Staat osculiret. §. 2. IV.

Bey

Bey einer solchen Messung muß daher für die gemessene und auf den Seehorizont reducirte Grundlinie ihr Centralwinkel berechnet werden, §. 10. V.; wenn dieser Winkel nicht selbst astronomisch bestimmt ist, §. 10. VI.; an sie schließet sich übrigens das Wurzeldreyeck, wie bey der geradlinichten Messung in §. 12. an; und das Verfahren bey der Aufnahme der Winkel, §. 4. VI.; so wie die Maximen der Aufnahme selbst, §. 3. IV., kommen ganz mit der geradlinichten überein.

Unter diese Maximen gehöret nun zuvörderst die Ausgleichung der Winkel in jedem sphärischen Dreyeck sowohl, als in einem ganzen Complex derselben; die meines Erachtens nach folgenden Principien berechnet werden können.

Ausgleichung der Winkel eines sphärischen Dreyecks.

I. Da bey geographischer Aufnahme der Hauptdreyecke eines Landes, die als solche immer concentrisch gemessen werden, §. 4. III. e., seine Winkel immer sphärische sind, §. 1. III., so ist ihre Summe in jedem dieser Dreyecke immer größer als 180 Grade.

Ist nun der sphärische Exceß §. 2. X. für ein solches Dreyeck $= Z$; und die Summe seiner drey Winkel $= A$; so wäre $A = 180 + Z$; wenn die Winkel sämmtlich mathematisch richtig gemessen worden wären, oder die bey ihrer Messung unvermeidlichen Fehler sich glücklich gegen einander aufgehoben hätten.

Ist hingegen für ein solches Dreyeck befunden worden $A - (180 + Z) = \pm \delta$; so muß die Differenz ($\delta$) meines Erachtens unter die 3 Winkel mit Rücksicht auf die Zuverlässigkeit ausgeschlagen oder interpolirt werden, mit welcher der Beobachter einen um den andern aufneh-

nehmen konnte (§. 8.), so daß man jenen Winkel um so mehr ändert, je unzuverlässiger er nach der Deutlichkeit, in welcher der Geograph den Gegenstand und den Limbus sehen konnte, gemessen werden kann. §. 3.

a. Es seyen z. E. in einem Dreyeck ACB gemessen worden, durch Multiplication der Winkel $A = 60°\,„\,0'\,„\,0''$; $B = 53°\,„\,3'\,„\,3'',03$; $C = 66°\,„\,57'\,„\,6'',2$; so ist ihre Summe $A = 180°\,„\,0'\,„\,9'',23$.

Es wurde ferner der sphärische Excess dieses Dreyecks zu $5''\,„\,23 = Z$ berechnet; mithin ist

$\delta = 180°\,„\,0'\,„\,9'',23 - 0°\,„\,0'\,„\,5'',73 = 3,5$ Secunden.

Nun findet aber der Geograph in seinem Manuale aufgezeichnet, daß er den Gegenstand A in C, und den Limbus mit der Deutlichkeit I. und 14. nach §. 4. VI. d. sahe, bey welcher er nach den Versuchen §. 4. VIII. b. den Winkel bis auf 2 Secunden sicher messen konnte.

Dagegen konnte er A und B nach der Deutlichkeit, in welcher er C und A und den Limbus sahe, nur mit einer Zuverlässigkeit von 3 und 4 Secunden messen.

Unter solchen Umständen erleidet daher der Winkel C die geringste, der B aber die größte Aenderung; setzt man daher die Aenderung des C gleich x; so ist

$9 : 2 = 3,5 : x$; $x = \frac{7}{9} = 0,77$ Secunden.

Eben so ist die Aenderung für den Winkel A gleich 1,166; und für $B = 1,55$ Secunden; mithin das ausgegleichte Maaß des Winkels $A = 59°\,„\,59'\,„\,58'',82$; $B = 53°\,„\,3'\,„\,1'',48$; $C = 66°\,„\,57'\,„\,5'',43$.

Diese Winkel nimmt nun der Geograph bey Berechnung des Dreyecks ACB vorläufig in Ansatz, bis er in der Folge Veranlassung findet, mit denselben äußerst unbedeutende Veränderungen vorzunehmen, wie ich nachgehends zeigen werde.

b. Nach diesem Princip lassen sich auch die Winkel eines Dreyecks ausgleichen, das man nach seiner Größe für geradlinicht ansehen kann, dessen sphärischer Exceß mithin verschwindend ist. §. 2. (X.)

In einem solchen Dreyeck soll daher immer die Summe seiner 3 Winkel gerade 180 Grade seyn; wo sich nun nach seiner Winkelaufnahme eine Differenz von ±(δ) Secunden vorfindet, kann diese mit Rücksicht auf die Zuverlässigkeit, mit welcher jeder Winkel nach Umständen aufgenommen werden konnte, ausgeglichen werden.

Die sphärische Polygonal-Probe.

II. Es stelle Fig. (42. Tab. IV.) einen Theil der Primärdreyecke des aufgenommenen Landes vor; wobey AB die Grnndlinie, und HK eine der Verificationslinien ist, die sämmtlich auf den Seehorizont, oder auf ihren trockenen Sürfas reducirt sind; und DE ist die Seite eines Primärdreyecks, das fast mitten zwischen beiden lieget.

a. Nimmt nun der Geograph die Dreyecke zusammen, die von AB nach DE und von KH eben dahin führen, so ergeben sich ihm in dieser Section ein 5 Eck ABMED und ein 6 Eck HKGEBF; über welche er vorläufig die sphärische Polygonal-Probe anstellet.

Nun ist aber in einem sphärischen Dreyeck die Summe seiner 3 Winkel gleich 180+z, wenn z seinen sphärischen Exceß §. 2. X. bezeichnet.

Für das Polygon ABMED müßte daher die Summe seiner Winkel seyn 5.180+λ, wenn (λ) die Summe der sphärischen Exceße aller 5 Dreyecke anzeiget.

Hat nun statt dessen der Geograph diese Winkel zu 5.180+x gemessen, so findet sich die Differenz x—λ in diesem Polygon vor, die nun unter die 15 Winkel mit

Rück-

Rücksicht auf die Zuverlässigkeit vertheilt werden muß, mit welcher jeder bey bestehenden äußern Umständen gemessen werden konnte.

Wo Winkel vorerst centrirt werden mußten, nimmt der Geograph auf diese in soferne besondere Rücksicht, als er diese um so unzuverlässiger hält, je mißlicher die Umstände der Centrirung waren: er ändert sie deswegen bey jener Ausgleichung in Vergleich mit andern um so mehr, je weniger Zutrauen er auf sie haben kann.

Eben so vollführet der Geograph die Ausgleichung der Winkel auch für das Polygon HKGEDF; und bereiret sich so für die Berechnung der Seiten selbst vor: er verfähret eben so, wenn er auch auf der linken Seite der Grundlinie AB eine andere Verificationslinie gemessen hätte.

b. Wo der Geograph eine Diagonale §. 9. gezogen hätte, wie z. E. über BML, so fundiret er die sphärische Winkelprobe zunächst auf diese, indem er ein Polygon in dem Netz auswählet, welchem diese Linie eine Seite abgiebt: er nimmt dabey den Winkel bey (M) immer zu 180 Graden an, und gleichet die übrigen Polygonwinkel in dieser Voraussetznng nach (I.) aus.

Provisorische Berechnung des Triangularnetzes.

III. Hat der Geograph nach (II.) die Winkel einer Section seines Netzes ausgeglichen, so berechnet er nach denselben **vorläufig** die Seiten der Dreyecke, aus welchen es zusammengesetzt ist; er berechnet eben so die Seiten der angränzenden Section, welcher die gemessene Verificationslinie angehöret in Grundlegung derselben, und endet diese Rechnung mit einer Seite, die beiden Sectionen gemeinschaftlich angehöret, die ihm deswegen eine **Probseite** abgiebt.

Die-

Diese Probseite ist nach Fig. (42.) die Linie DE! Es berechnet deswegen der Geograph aus der Grundlinie AB in der Section ABMED die Seiten BC„ AC„ BM„ CM„ ME„ CE„ AD„ DC„ DE; er berechnet eben so durch die Verificationslinie KH die Seiten der Section HKG EDF (I.), und erhält sonach für die Seite DE ein Maaß, das von der Section ABMCD ganz unabhängig ist.

a. Ueber diese Rechnung hält sich der Geograph einen eigenen Triangular-Cataster, dessen Blätter halb gebrochen sind; und wiedmet die eine Spalte derselben, der provisorischen, die andere der definitiven Dreyeckrechnung.

In der erstern werden nun für jedes Dreyeck die Winkel aufgeführt, wie sie unmittelbar ihres Orts gemessen, und nachgehends centrirt wurden; welchen nachgehends die vorläufige Ausgleichungs-Differenzen (II.) noch beigesetzt werden.

Diesen Datis folget nun die Berechnung der Seiten der Dreyecke unmittelbar selbst, welcher noch außerdem der Theil beigesetzt wird, für welchen der Geograph in ihrer Bestimmung nach den Folgen der unvermeidlichen Fehler nicht mehr stehen kann.

Uebrigens ist diese Triangularrechnung selbst folgende. Es seye die verificirte Grundlinie AB = c, §. 10. V. die Seiten AC = b; BC = a: und die ihnen entgegenstehende ausgeglichene Winkel (I.) gleich C„ B„ A; so ist nach der sphärischen Trigonometrie

$$\text{Sin C} : \text{Sin c} = \text{Sin A} : \text{Sin a}.$$

In diesem Dreyeck sey nun im Bogenmaaß die Seite AB = c = 0°„28′„49″; und die ausgeglichenen Winkel

$$A = 59°„59′„59″,125; \quad B = 53°„3′„1″,364;$$
$$C = 66°„57′„4″,74.$$

log

log Sin c = 7,9233648—10.	log Sin c = 7,9233648—10.
l. Sin A = 9,9375296—10.	l. Sin B = 9,9026360—10.
17,8608944—20.	17,8260008—20.
l. Sin C = 9,9638686—10.	l. Sin C = 9,9638686—10.
7,8970238—10.	7,8621322—10.
BC = a = 0° „ 27′ „ 7″,25.	AC = b = 0° „ 25′ „ 1″,62.

Nun ist ferner im Längenmaaß die Seite AB = 53400. Meter; mithin auch in dem nemlichen Maaß

BC = 50995,98; AC = 46377,10. Meter.

Nach diesen Principien berechnet der Geograph alle übrige an das Wurzeldreyeck ABC sich anschließende Dreyecke, bis er durch dieselbe die Seite des nächsten Primär-Dreyecks erreicht: und reihet an dieses die übrigen nach und nach an, in einer Richtung, die ihn zunächst nach einer der gemessenen Verificationslinien führet.

b. Dabey ist es nicht genüglich, daß der Geograph die Bogen- und Längenseiten seiner Haupttriangularreihe in seinem Triangular-Cataster aufführet: er muß außerdem auch noch ihre Differential-Verhältniße beifügen, um erforderlichen Falls davon Gebrauch machen zu können.

Diese Differential-Verhältniße der Seiten reguliren sich immer nach dem Theil, um welchen der Geograph in der Basis des Dreyecks, und in seinen Winkeln ungewiß bleibt, ob er sie zu groß oder zu klein gemessen habe; sie stellen eigentlich die Folgen vor, welche diese unvermeidliche Fehler auf die berechneten Seiten des Dreyecks haben.

Diese Differential-Verhältniße der Bogenseiten eines Dreyecks sind nun an und für sich, kleine Winkel, die ihren Mittelpunct in dem Centro der Sphäre haben, welche das aufzunehmende Land osculiret.

Da

Da aber geographische Dreyecke immer nur klein sind, so lassen sie sich auch ohne merklichen Fehler als geradlinichte rücksichtlich der Differential-Verhältniße ihrer Seiten behandeln; und man kann aus ihrer Längen-Differenz leicht ihre Bogen-Differenz finden.

Ist z. E. der Erdhalbmesser eines Dreyecks $= r$; und seine Längen-Differenz $= da$; so ist auch seine Bogen-Differenz $\frac{da}{r} . 206264$ in Secunden.

Ich setze daher auch die Gleichung für das geradlinichte Dreyeck an,

$$\log a = \log c + \log \text{Sin } A - \log \text{Sin } C;$$

woraus sich nach dem Differential-Calcul ergiebt, §. 8.

$$\frac{da}{a} = \frac{dc}{c} + dA . \text{Cotang } A - dC . \text{Cotang } C.$$

Dabey kann nun der Winkel C um dC zu groß oder auch zu klein gemessen; er kann größer oder kleiner als dA seyn.

Ich setze nun $dA = dC$, und nehme dC. negativ, wornach die Folgen des Fehlers um so größer werden; so ergiebt sich nach diesen Voraussetzungen, die Longitudinal-Differenz der Seite BC = in folgendem Ausdruck

$$da = a . \left[\frac{dc}{c} + \frac{dA . \text{Sin}(A+C)}{\text{Sin } A . \text{Sin } C} \right] \text{ in Metern;}$$

und ihre Angular-Differenz in Secunden,

$$\frac{a}{r} . \left[\frac{dc}{c} + \frac{da . \text{Sin } B}{\text{Sin } A . \text{Sin } C} \right] . 206264.$$

Dabey sind nun die Werthe von dA und dC insbesondere in nächster Beziehung mit der Deutlichkeit, mit welcher der Geograph die Gegenstände und den Limbus ansahe, §. 3.; es ist dC gegen dA um so größer, je unzuverlässiger der Winkel C nach seinen Umständen in Vergleich mit dem A gemessen werden konnte.

Um aber die Rechnung leichter zu führen, nehme ich $dA = dC$, und zwar jeden zu einer Secunde an, weil sich sein Glied für einen andern Werth leicht finden, oder proportioniren lässet.

Da es ferner hier nicht darauf ankommt, die Winkel selbst nach ihren kleinsten Theilen in Rechnung zu bringen, so setze ich hier

$$A = 60;\ B = 53{,}3;\ C = 66{,}57;\ a = 50998;$$
$$c = 53400 \text{ Meter};$$

und nehme an, der Geograph sey ganz überzeugt, daß er die Seite AB des Dreyecks bis auf 2 Meter sicher bestimmen konnte; wornach also $dc = 2$ Meter wird.

Nun ist einmal

$\log \text{Sin } 1'' = 4{,}6855749 - 10.$	$\log \text{Sin } A = 9{,}9375306 - 10.$
$\log \text{Sin } B = 9{,}9026339 - 10.$	$\log \text{Sin } C = 9{,}9637650 - 10.$
$14{,}5882088 - 20.$	$19{,}9013656 - 20.$

$$14{,}5882088 - 20.$$
$$19{,}9013956 - 20.$$
$$4{,}6868132 - 10.$$

Absolutzahl $0{,}0000048620.$

Ferner ist $\frac{dc}{c} = \frac{2}{53400} = 0{,}00003745$; mithin auch

$da = 50998.$ $0{,}0000423\,14 = 2{,}158.$

Würde nun der Geograph die Seite AB um 2 Meter, und jeden der ihr vorliegenden Winkel um eine Secunde zu groß oder zu klein gemessen haben, so würde die Seite BC dadurch um 2,158 Meter zu groß oder auch zu klein ausfallen; er könnte in ihrer wahren Länge für diesen Theil nicht mehr stehen.

Ist nun der Halbmesser des Dreyecks $= 6365206$ Meter; so macht jene Längen-Differenz der Seite, die Bogen-Differenz in Secunden

$$\text{von } \frac{2{,}158}{6365206} \cdot 206264 = 0{,}169932 \text{ Secunden.}$$

Eben so wird auch die Seiten-Differenz für die Seite AC berechnet; und beide in dem Triangular-Cataster (a.) dem Dreyeck selbst beigesetzt.

Diese Seiten-Differenz wird ferner zum Grunde gelegt, wenn man aus den Seiten BC„AC, die Folgen der Fehler berechnen will, welche diese auf die anstoßenden Dreyecke BCM„ADC haben; u. s. w.

c. Hat der Geograph die Seiten seiner großen Primär-Dreyecke für jede Section (a.) in Grundlegung ihrer drey wirklich central gemessenen §. 4. III. und ausgeglichenen Winkeln (I.) berechnet, so leget er diese für die Aufnahme der Secondair-Dreyecke oder der Dreyecke vom 2ten Grade und niedern Graden zum Grunde, welche in ein Primär-Dreyeck hinein fallen. So ergiebt sich z. E. aus der Seite DE des Primär-Dreyecks DFE das Secondär-Dreyeck D«E, u. dergl.

Diese Secondär-Dreyecke haben nun in soferne noch Bogen-Seiten, als ihre Länge von ihrer Chorte noch merklich abweicht, oder auch ihr sphärischer Exceß noch merklich ist, und müssen deswegen auch sphärisch berechnet werden; man berechnet sie statt dessen nur geradlinicht, wenn ihr Exceß ohne merklichen Fehler beseitiget werden kann; und es ist nach §. 2. X. die Seite solcher Dreyecke höchstens 3 geographische Meilen.

Da nun in solchen secondären sphärischen Dreyecken nicht immer alle 3 Winkel wirklich gemessen werden können; oder wenn auch dieses seyn könnte, die Arbeiten des Geographen gar zu aufhaltend werden müssen, so berechnet der Geograph die Seiten derselben öfters aus ihrer Grundlinie und zweier an ihnen gemessenen Winkeln; er findet nach Umständen auch eine ihrer Seiten, aus zweien andern und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel, die mit jener ein solches Dreyeck con-

constituiren. Deswegen füge ich hier noch die Formeln der sphärischen Trigonometrie für diese Fälle bey.

d. Wenn daher in dem sphärischen Dreyeck DαE gegeben sind, die Seite DE, und die anliegenden Winkel αDE = D; und DEα = E; und man sucht hieraus die Seite Dα; so ist

$$\text{tang } E\alpha = \frac{\text{tang D} \cdot \text{Sin DE}}{\text{Cos E} \cdot \text{tang D} \cdot \text{Cos DE} + \text{Sin E}}.$$

Setzt man in dieser Formel tang u = Cos DE . tang D; so wird

$$\text{tang } C\alpha = \frac{\text{tang D} \cdot \text{Sin DE}}{\text{Cos E} \cdot \frac{\text{Sin u}}{\text{Cos u}} + \text{Sin E}};$$ und hieraus

$$\text{tang } C\alpha = \frac{\text{tang D} \cdot \text{Sin DE} \cdot \text{Cos u}}{\text{Sin (E + u)}};$$

welche Formel für den vorigen den Vortheil der logarithmischen Auflösung hat.

e. Sind in dem Secondär-Dreyeck αEB gegeben, die Seiten αE, βE und der von ihnen eingeschlossene Winkel αEβ = E; so ist

Cos aβ = Cos E . Sin Eα . Sin Eβ + Cos Eα . Cos Eβ; oder auch

$$\text{Cos } \alpha\beta = \frac{\text{Cos E}\beta \cdot \text{Cos (E}\alpha - \mu)}{\text{Cos } \mu};$$

wenn man tang μ = Cos E . Cos Eβ setzt.

f. Ist das Dreyeck αEβ so klein, daß man seinen sphärischen Exceß beseitigen kann, und es ergiebt sich aus seiner Seite Eα, und zweien ihr anliegenden Winkeln ein Dreyeck αuE, so gehöret dieses nach seiner Entstehung zur dritten Classe, und kann deswegen als geradlinicht behandelt werden.

Setzt man nun seine Grundlinie Eα = c; die Winkel uEα = A; uαE = B; αuE = C und die Seiten uα = a; uE = b; so ist

$$\text{Sin C} : \text{c} = \text{Sin A} : \text{a}'; \quad \text{a} = \frac{\text{c Sin A}}{\text{Sin E}}.$$

g. Sind ferner in einem solchen Dreyeck 2 Seiten b„c und der von ihnen eingeschlossene Winkel A gegeben, und man bestimmt aus ihnen die Seite a; so ist bekanntlich

$$a = \sqrt{(b^2 + c^2 - 2bc \operatorname{Cos} A)},$$

in welcher Formel Cos A negativ, für einen stumpfen Winkel A wird.

h. Ist statt dessen in einem geradlinichten Dreyeck ABC gegeben zwey Seiten a„b und der Winkel B, welcher einer der gegebenen Seiten gegenüber stehet, und man sucht die Seite c; so ist bekanntlich

$$c = a \operatorname{Cos} B + \sqrt{(b + a \operatorname{Sin} B).(b - a \operatorname{Sin} B)}.$$

In dieser Formel wird Cos B negativ, für einen stumpfen Winkel B.

Interpolation der sphärischen Dreyeckreihe.

IV. Bevor aber der Geograph die Berechnung der Secondärdreyecke III. d.. unternimmt, muß er vorerst seine provisorisch berechnete Primärdreyeckreihe prüfen, um sie ein für allemal definitiv zu machen.

Diese Prüfung aber geschiehet zunächst am schicklichsten durch die Probseite DF, welche den beiden Sectionen ABMED und HKGEDF gemeinschaftlich ist (II.).

Bestimmet nemlich der Geograph die Seite DE durch erstere Section aufs genaueste eben so groß als durch die andere Section, in Beseitigung aller Rechnungsfehler, so ist es möglich, daß sämmtliche Winkel beider Sectionen mathematisch richtig §. 4. VIII. gemessen worden sind; oder es können sich auch die Folgen der unvermeidlichen Fehler der einen Section, gegen die der andern wechselseitig aufgehoben haben: es erkennet daher in diesem Fall der Geograph jede dieser Sectionen für definitiv bestimmt, oder als richtig an.

Fin-

Findet aber statt dessen in der Probseite DE sich eine Differenz, oder weichen die Resultate der durch jede Section für sie fortgesetzten Rechnung von einander ab, so müssen die Winkel jeder Section in so weit interpolirt oder geändert werden, bis sich die Seite DE durch die eine Section eben so groß wie durch die andere ergiebt.

Diese Aenderung der Winkel der Dreyecke jeder Section kann sich aber höchstens nur auf Decimaltheile einer Secunde für jeden belaufen, wenn der Geograph, wie man voraussetzen darf, mit größtem Fleiß, und Geschicklichkeit mit Instrumenten operirt hat, welche die Winkel auf 2 Secunden sicher messen, und er außerdem seine Grundlinien AB und die Verificationslinie KH aufs fleißigste gemessen, und gehörig behandelt hat. §. 10.

Diese Interpolation muß ferner mit Rücksicht auf die Zuverlässigkeit geschehen, mit welcher die Problinie von jeder Section aus bestimmt werden mochte; so daß jene Winkeländerung für jene Section um so unbedeutender wird, je größere Zuverlässigkeit sie an und für sich für jene Seite gewährten.

a. Es habe z. E. der Geograph die Probseite DE durch die Section der Verificationslinie zu 50000 Meter, von der Section der Grundlinie aber zu 49998,5 Meter berechnet.

Auch ist im ersteren Fall die Folge der unvermeidlichen Fehler gerade ein Meter, und im andern 2 Meter; oder der Geograph kann durch die Verificationslinie die Seite DE bis auf einen Meter sicher bestimmen, durch die Grundlinie aber nur bis auf 2 Meter.

Sonach ist die Differenz, welche sich in der doppelten Bestimmung der Problinie vorfindet, $1\frac{1}{2}$ Meter, und die Zuverlässigkeit für ihre richtige Bestimmung von der Seite der Verificationslinie her nochmal so groß als von der Section der Grundlinie.

Wenn

Wenn man daher die Probseite DE durch AB bestimmt, um x Meter kürzer macht, so muß man der durch KH bestimmten DE, nur $\frac{1}{2}$x zugeben, und es ist sonach $x + \frac{1}{2}x = 1,5$; $x = 1$. Meter; mithin ist

$DE = 50000 - 1 = 49999$ durch AB, und

$DE = 49998,5 + \frac{1}{2} = 49999$ durch KH, das wahrscheinlichst richtige Maaß dieser Probseite.

Dieß Maaß für diese Linie nun gehörig zu vollstrecken, muß der Geograph die Winkel der beiden Sectionen in Kleinigkeiten in soweit abändern, daß er nach ihnen die Seite DE von der einen, wie von der andern Seite her zu 49999 Metern erhält.

b. Diese kleine Aenderung der Winkel in jedem Dreyeck der beiden Sectionen, trägt der Geograph in seinem Triangelcataster auf die noch offene Spalte (II. a.) neben das Dreyeck, dem sie gilt, und füget dann dessen definitive Rechnung bey; so daß man auf der einen Spalte die provisorische Rechnung des Dreyecks, neben seiner definitiven vorfindet.

Mit dieser durch jede der Sectionen ABMED und HKGEDF durchgeführten definitiven Rechnung ist nun jede derselben als richtig anerkannt, und leitet sonach keine weitere Veränderung; und der Geograph legt nun ihre Umfangsseiten AB„ BM„ ME„ NG„ GK„ KH„ HF„ DF„ AD, als richtig bestimmte ein für allemal feste; und setzt durch sie sein Triangularnetz weiter, und bis dorthin fort, wo er für eine neue Juterpolation nach Umständen Veranlassung findet.

Die Coordinaten des sphärischen Dreyecknetzes.

V. Denkt man sich durch die Stelle M eines Staates, eine Verticalebene, deren Verlängerung durch beide Erdpole gehet, so ist diese in soweit sie in dieser Richtung

den

den Staat durchschneidet, die Meridianebene der Stelle M desselben; sie schneidet als solche den trockenen Sürfas, oder auch die ihn osculirende Sphäre des Staates, in der Meridian- oder Mittagslinie N°.S°; deren nördliches Ende in N° und das südliche in S° trift. Fig. 42.

a. Denkt man sich ferner durch die Orte oder Stellen M und E eine Verticalebene, so macht diese mit der Meridianebene von M, einen Winkel, welcher das Azymuth der Ebene durch ME heißt; und dieser ist gleich dem Winkel N°ME, welchen die Meridianlinie durch M, mit der Linie ME auf dem Sürfas der Ellipsoide, oder auch auf der sie osculirenden Sphäre macht.

Legt man ferner durch die Stelle E eine Verticalebene senkrecht auf die durch M gehende Meridianebene des Landes, so schneidet diese den Sürfas in der Linie Ea, die also der NS eine Perpendiculaire abgiebt.

Siehet man nun die Meridianlinie N°.S° als eine Abscissenlinie an, in welcher die Abscissen in dem Puncte M ihren Anfang nehmen, so ist die Curve Ma die Abscisse des Distanzpuncts E, und die Curve Ea die Ordinate desselben; und diese beide Linien heißen in ihrem rechtwinklichten Verband, die Coordinaten des Distanzpuncts E.

Ist nun in dem sphärischen Dreyeck MaE bekannt, die Seite $ME = \varphi$ und der Azymuthalwinkel $aME = \lambda$; $Ma = x$; $Ea = \eta$; so ist auch $\sin \eta = \sin \varphi . \sin \lambda$; $\text{tang } x = \text{tang } \varphi . \cos \lambda$, wobey die Coordinaten bis auf die höhere Decimaltheile einer Secunde berechnet werden müssen.

Behandelt man den Punct C eben so wie den Punct E; so ist auch

$\sin Cb = \sin CMb . \sin ME$; $\text{tang } Mb = \text{tang } CM . \cos Cmb$,

wo $CMb = CME - \lambda$ ist.

Eben

Eben so verhält sichs auch mit dem Puncte B, dessen östliche Ordinate Be und nördliche Abscisse Me ist. Für den Punct L hingegen ist Mc seine südliche Abscisse, und Lc seine westliche Ordinate. Auch ist der Winkel $LMc = 180 - (\lambda + EML)$.

Ziehet man durch den Punct E eine Parallele N′S′ mit N°.S°. und fället von G einen Perpendikel Go auf dieselbe, so trift dessen Verlängerung die Meridianlinie in dem Puncte a′; und es ist nun $Ga' = Go + Ea$, die westliche Ordinate, und $Ma' = Ma + Eo$ die nördliche Abscisse des Punctes G.

Nun ist aber der Winkel $MES' = aME = \lambda$; und $S'EL = MEL - aME = MEL - \lambda$; ferner in dem Dreyeck oEG, der Winkel

$oEG = 180 - (GEL + LES') = 180 - (GEL + MEL - \lambda)$.

woraus sich mit der Distanz EG, die Ordinate oG und die Abscisse Eo berechnen läßt.

Betrachtet man die Seite EG als dem Vieleck MEGKHF... angehörig, so ist nach §. 5. auch der Winkel $oEG = 360 - (GEM + 90 - \lambda + 90) = 180 - (GEM - \lambda)$ und es lassen sich die Ordinaten und Abscissen der Eckpuncte dieses Polygons nach dem Verfahren §. 5. finden.

Eben dieses gilt nun auch für jedes Polygon auf der östlichen Seite des Meridians des aufzunehmenden Landes; und da sich auf diese Art die Lage der Orte des aufzunehmenden Landes nach den Weltgegenden ergiebt, so heißt man diese Berechnung auch die Orientirung der Orte des aufzunehmenden Landes.

c. Wo das Land nur so groß ist, daß man die Coordinaten seiner Gränzorte selbst, ohne merklichen Fehler als geradlinicht ansehen kann, wird die Coordinaten-Rechnung nach der geradlinichten Trigonometrie geführt, und deswegen einfacher.

Bezeichnet nemlich der Buchstabe (δ) die Distanz ME in Metern, oder auch nach landüblichen Fußen, so ist des Ortes E

Abscisse $Ma = \delta . \cos\lambda$; Ordinate $Ea = \delta . \sin\lambda$.

Ist ferner für den Ort G, sein Abstand von E gleich (D) und der Winkel $OEG = k$; so ist $OE = D . \cos k$; $OG = D . \sin k$; mithin des Ortes G

Abscisse $Ma' = \delta . \cos\lambda + D . \cos k$;
Ordinate $Ga' = \delta . \sin\lambda + D . \sin k$.

Die Ellipse des Triangular-Netzes.

VI. Alle diese Coordinaten des sphärischen Dreyecknezes, so wie dieses selbst, liegen nun auf dem elliptischen trockenen Sürfas des Landes, §. 1. I. e., über welchem das Netz verbreitet ist.

Diese Ellipse hat nun nach den von Hrn. de Lambre und Mechain von Dünkirchen bis auf die balearischen Inseln angestellten trigonometrischen Messungen das Axen-Verhältniß 150:149, §. 1. I. e.; und es passen mit derselben die meisten an verschiedenen Orten der nördlichen Halbkugel unserer Erde ausgeführte Messungen sehr nahe zu; so daß man deswegen diese Ellipse für jedes in dieser Halbkugel liegende Land annehmen könnte.

Wenn aber nichts destoweniger der Geograph bey der Aufnahme eines sehr großen Staates die Ellipse selbst bestimmen wollte, in deren Oberfläche er sein Dreyecknetz projicirt, so müßte er an zweien Orten desselben, wovon der eine so weit südlich, der andere so weit nördlich liegt, als angehet, eine Basis astronomisch bestimmen, §. 10. VI., und diese nachgehends auch geodätisch messen, §. 10. II., oder auch durch Coordinaten dieselbe berechnen, (IV.); um durch sie nach §. 2. das Axenverhältniß jener Ellipse zu finden.

Die-

Diese Bestimmung ist aber immer um so unzuverläßiger, je kleiner der Unterschied der geographischen Breite der Endpuncte jeder Grundlinie, oder je kürzer jede ist; weil der Geograph auch mit den beßten Vollkreisen in dem parallactischen Winkel jeder Grundlinie um eine Secunde fehlen kann. §. 10. VI.

Es habe z. E. der Geograph in der Gegend bey U in Fig. 1. die Differenz der Polhöhe zweier Standpuncte gerade $0°„50'$; und die Differenz ihrer Parallelen im Längenmaaß 92707 Meter befunden.

Eben so habe derselbe in der Gegend bey (Z) die Differenz der Polhöhen zweier Standpuncte zu $0°„35'„20''$, und den Unterschied ihrer Parallelen zu 65512,95 gemeßen und berechnet.

Wird dieser letztere Bogen auf das Maaß des erstern in (U) gebracht, so wird in dieser Gegend ein Bogen von $0°„50'$ gerade 92650 Meter in dem Niveau der Gegend (U) messen.

Nimmt man ferner aus den bey (U) und (Z) gemeßenen Polhöhen das arithmetische Mittel, so ergiebt dieses die geographische mittlere Breite von U gerade $52°„7'„0''$; und in der Gegend Z die mittlere Breite von $48°„36'„40''$.

Für diesen Fall wäre also in der Formel, §. 2. VIII.
$\alpha = 52°„7'„10$; $\beta = 48°„36'„40$; G = 92707 Meter;
H = 92650. Meter.

$\log H = 4,9668454.$
$\log G = 4,9671125.$

$\log \frac{H}{G} = 9,9997329-10.$

$\log \left(\frac{H}{G}\right)^{\frac{2}{3}} = 4,9998219-5.$

$\left(\frac{K}{G}\right)^{\frac{2}{3}} = 0,99959.$

$1-\left(\frac{K}{G}\right)^{\frac{2}{3}} = 0,00041.$

$\log \mathrm{Sin}^2.\beta = 0,7503996-1.$

$\log \left(\frac{H}{G}\right)^{\frac{2}{3}} = 0,9998219-1.$

$4,7502215-5.$

$0,5626218.$

$\mathrm{Sin}\,\alpha^2 = 0,6229386.$

$0,0603168.$

$\varepsilon^2 = 0,0067974; = 1-\mu^2.$

$\mu^2 = 0,9932026;\ 0,99660 = \mu;$

mit

mithin $a : b = 10000 : 9966 = 150 : 149{,}49$.

Nimmt man nun die Erdaxe zu 6356549 Meter an, so wäre der größere Halbmesser der für das aufzunehmende Land zupassenden Ellipse 6378336 Meter.

Differenz der sphärischen Messung von der geradlinichten.

VII. Bezeichnet in Fig. (43.) A einen Ort auf der Erde, dessen localer, in seine Schwerlinie fallender Krümmungshalbmesser §. 2. VII. c. gleich $AC = \varrho$ ist, so kann man auf Distanzen, welche nicht größer sind, als die Seiten der sphärischen Dreyecke, die der Geograph mit seinem Geodoliten noch construiren darf, §. 4. III., die Krümmung der Erde ohne merklichen Fehler noch für einen Bogen dieses Kreises gelten lassen.

Liegt nun ein Gegenstand in E, so findet der Geograph durch seine geradlinichte Dreyeckmessung den Abstand der Orte A und E in der Tangente AB; statt dessen er bey der sphärischen Messung für den Abstand dieser Orte den Bogen AD erhält, der in dem Sürfas der Meere selbst lieget.

Der Unterschied der Bestimmung der nemlichen Distanz, nach der geradlinichten und sphärischen Messung, ist daher der Differenz der Tangente des Winkels ACB von ihrem Bogen AD gleich.

Ist nun $AC = \varrho$; $AB = \delta$ Meter; und der Winkel $ACB = z$; so ist einmal

$$\text{tang } z = \frac{AB}{AC} = \frac{\delta}{\varrho};$$ und nach der analytischen Trigonometrie

$$\text{tang } z = z + \frac{z^3}{1.3} + \frac{2.z^5}{1.3.5} + \frac{17.z^7}{1.3.5.7.3} + \frac{62.z^9}{1.3.5.7.9.3} + ..$$

mit-

mithin in der Figur

$$AB - AD = \text{tang } z - z = \left(\frac{1}{3} \cdot z^3 - \frac{2z^5}{15}\right) \cdot \varepsilon \cdot$$

$$= z^2 \cdot \varepsilon \cdot \left(\frac{1}{3} z - \frac{2}{15} \cdot z^3\right).$$

Es sey z. E. bestimmt worden der Krümmungshalbmesser $\varepsilon = 6378000$ Meter; $\delta = 75000$ Meter; so ist einmal $\text{tang } z = \frac{75000}{6378000}$.

$\log \delta = 14,8750613 - 10.$
$\log \varepsilon = 6,8046845.$

$8,0793768 - 10.$

$z = 0° „40' „25''.$ Arc. $z = 0,01175673...$

$\log \varepsilon = 6,8046845.$	$14,9452775 - 12.$
$\log z^2 = 8,1405930 - 12.$	$12,2108895 - 18 = \log z^3.$
$\log \frac{1}{3} z = 4,5931642 - 7.$	$0,3010300 = \log 2$
$4,5384417 - 4.$	$4,4571970 - 7.$
$3,4550.$	$1,1760913 = \log 15.$
$0,00019.$	$4,2811057 - 8.$
$3,45481.$ Meter.	$0,00019100.$

Der Unterschied zwischen der sphärischen und geradlinichten Messung erstrecket sich also in dieser Gegend auf beiläufig 10 geogr. Meilen schon über 3 Meter.

§. 16.

§. 16.

Berechnung der Breiten- und Längen-Differenz der Orte, durch ihre sphärische Coordinaten.

Wenn diese Differenzen groß sind.

I. Hat der Geograph nach §. 15. V. die sphärischen Coordinaten der Orte des Staates für den Meridian eines Ortes A berechnet, der, so viel möglich ist, in der Mitte des Landes liegt, so kann er dieselbe für die Berechnung der geogr. Breiten- und Längendifferenz jener Orte folgendermaßen benutzen.

Es stelle nemlich in Fig. (44.) vor, C den Mittelpunct unsers Erdellipsoids; GFE die Ebene ihres Aequators durch denselben; PAE den elliptischen Meridian des Ortes A, dessen Schwerlinie die Erdaxe in dem Pucnte M schneidet.

Denkt man sich eine Sphäre, deren Halbmesser dem Erdhalbmesser AM des Ortes A gleich ist, und den Punct A des elliptischen Meridians osculiret, so schneidet ihr Bogen AHP die Verlängerung der Erdaxe in dem Punct P.

Eben so schneidet auch der Bogen eines Ortes B diese Sphäre in dem Kreise FBP; und seine Schwerlinie schneidet die Erdaxe in der Stelle O.

Sonach ist der Wiukel $ALE = L$ die geographische Breite des Ortes A und FNB die Breite des Ortes A; denkt man sich ferner durch B einen Parallelkreis BD mit dem Aequator gezogen, so ist AD die Breitendifferenz $= L' - L = \Delta L$, und der Winkel $FCE = BPA = M$ die ganze Längendifferenz beider Orte A und B.

Ziehet man durch B einen Kreis senkrecht auf den Meridian des Ortes A, so schneidet dieser denselben in dem Punct H, und trift den Aequator in der Stelle G,

die

die auf ihm von dem Puncte E um 90 Grade, oder um einen ganzen Quadranten entfernt ist.

Auch ist der Bogen BH = p die berechnete Ordinate des Ortes B, und der Bogen AH = q die nach §. 15. (V.) berechnete Abscisse desselben.

a. Denkt man sich ferner auf der osculirenden Sphäre von A nach B einen Bogen AB gezogen, so ergiebt sich auf derselben das bey H rechtwinklichte Dreyeck AHB, und das Dreyeck APB; und es ist in erstern nach der sphärischen Trigonometrie

$$\text{Cos AB} = \text{Cos BH Cos AH}; \quad \text{oder}$$

$$\text{Cos K} = \text{Cos p . Cos q};$$

Ferner ist auch in dem Dreyeck AHB:

$$\text{tang BAH} = \frac{\text{tang BH}}{\text{Sin AH}}; \quad \text{oder}$$

$$\text{tang Z} = \frac{\text{tang p}}{\text{Sin q}}.$$

Letztlich ist auch in dem sphärischen Dreyeck ABP

$$\text{Cos BP} = \text{Cos BAP . Sin AP . Sin AB} + \text{Cos AP . Cos AB};$$

weil nun PB = 90 — L′ und AP = 90 — L ist; so ist auch

$$\text{Cos BP} = \text{Sin L}'; \quad \text{Sin AP} = \text{Cos L}; \quad \text{mithin auch}$$

$$\text{Sin L}' = \text{Cos Z . Cos L . Sin K} + \text{Sin L . Cos K}.$$

Setzt man in dieser Formel $\text{Sin K} = \text{Cos K . tang K}$; und $\text{Cos Z . tang K} = \text{tang } \mu$; so ist auch

$$\text{Sin L}' = \text{tang } \mu \text{ . Cos L . Cos K} + \text{Sin L . Cos K}; \quad \text{oder}$$

$$\text{Sin L}' = \text{Cos K . (tang } \mu \text{ . Cos L} + \text{Sin L)}; \quad \text{oder}$$

$$\text{Sin L}' = \frac{\text{Cos K}}{\text{Cos } \mu} \text{. (Sin } \mu \text{ . Cos L} + \text{Cos } \mu \text{ . Sin L)};$$

$$\text{Sin L}' = \frac{\text{Cos K}}{\text{Cos } \mu} \text{. Sin (L} + \mu) = \frac{\text{Cos p . Cos q}}{\text{Cos } \mu} \text{. Sin (L} + \mu). \quad \text{(I.)}$$

b. Diese Formel giebt die geographische Breite des Ortes B für den Mittelpunct M der osculirenden Sphäre; da aber die Schwerlinie BO des Ortes B auf der Ellipse um MO von diesem Puncte abweichet, so muß von

der

der berechneten Breite der Winkel OBM noch abgezogen werden; welcher sich folgendermaßen berechnen lässet.

In dem Dreyeck OBM ist nemlich

$$\text{Sin OBM} : \text{MO} = \text{Sin BOM} : \text{BM}; \text{ also}$$

$$\text{Sin OBM} = \frac{\text{MO} . \text{Sin BOM}}{\text{BM}}; \text{ oder}$$

$$\text{Sin OBM} = \frac{\text{MO} . \text{Cos L}'}{\text{AM}} = \frac{\text{CO} - \text{CM} . \text{Cos L}'}{\text{AM}}.$$

Nun ist aber nach §. 2. III.

$$\text{CO} = \frac{a . \varepsilon^2 . \text{Sin L}}{\sqrt{(1 - \varepsilon^2 . \text{Sin}^2 \text{L}')}}; \quad \text{CM} = \frac{a . \varepsilon^2 . \text{Sin L}}{\sqrt{(1 - \varepsilon^2 . \text{Sin}^2 . \text{L})}};$$

ferner

$$\text{MA} = \frac{a}{\sqrt{(1 - \varepsilon^2 . \text{Sin}^2 . \text{L})}}; \quad \text{BO} = \frac{a}{\sqrt{(1 - \varepsilon^2 . \text{Sin}^2 . \text{L}')}};$$

mithin auch

$$\text{CO} - \text{CM} = \varepsilon^2 (\text{BO} . \text{Sin L}' - \text{AM} . \text{Sin L}).$$

c. Mißt die Breiten-Differenz der Orte A und B nicht mehrere Grade, so kann man ohne merklichen Fehler BO = AM setzen; und für diesen Fall ist nun

$$\text{CO} - \text{CM} = \varepsilon^2 (\text{Sin L}' - \text{Sin L})$$

$$= 2 . \varepsilon^2 . \text{AM} . \text{Cos} \tfrac{1}{2} (\text{L}' + \text{L}) . \text{Sin} \tfrac{1}{2} (\text{L}' - \text{L});$$

mithin auch

$$\text{Sin OBM} = 2 . \varepsilon^2 . \text{Cos} \tfrac{1}{2} (\text{L}' + \text{L}) . \text{Sin} \tfrac{1}{2} (\text{L}' - \text{L}) . \text{Cos L}';$$

oder in Secunden der Winkel

$$\text{OBM} = 2 . \varepsilon^2 . \text{Cos} \tfrac{1}{2} (\text{L}' + \text{L}) . \text{Sin} \tfrac{1}{2} (\text{L}' - \text{L}) . \text{Cos L}' . 206264.$$

d. Was ferner die Längen-Differenz der Orte A und B anbelangt, so findet sich dieselbe in dem Winkel APB, welcher zunächst aus den Seiten AP „AB und dem Winkel BAP des sphärischen Dreyecks APB sich ergiebt.

Es ist nemlich nach der sphärischen Trigonometrie

$$\text{tang BPA} = \frac{\text{Sin BAP} . \text{tang AB}}{\text{Sin AP} - \text{Cos BAP} . \text{tang AB} . \text{Cos AP}}; \text{ oder}$$

$$\text{tang M} = \frac{\text{Sin Z} . \text{tang K}}{\text{Cos L} - \text{Cos Z} . \text{tang K} . \text{Sin L}}.$$

Woll-

Wollte man statt dessen die Seiten PB und AB mit dem Winkel BAP in Rechnung nehmen, so wäre auch

$$\text{Sin BAP} : \text{Sin PB} = \text{Sin BPA} : \text{Sin AB};$$ oder

$$\text{Sin z} : \text{Cos L}' = \text{Sin M} : \text{Sin k};$$ also

$$\text{Sin M} = \frac{\text{Sin k} \,.\, \text{Sin z}}{\text{Cos L}'} \quad \text{II.}$$

e. Um dieß durch ein Exempel zu erläutern, nehme ich an, es sey die Polhöhe des Ortes A zu $L = 48°\,,,24'\,,,6''$ gemessen worden; auch sey die Ordinate BH des Ortes B zu $p = 3°\,,,45'$ und die Abscisse AH zu $q = 2°\,,,10'$ summiret worden; so ist hier einmal

$\text{CosAB} = \text{Cosk} = \text{Cos p} \,.\, \text{Cos q}.$	$\text{tang z} = \frac{\text{tang p}}{\text{Sin q}}.$
$\log \text{Cos p} = 9{,}9990691-10.$	$\log \text{tang p} = 8{,}8165294-10.$
$\log \text{Cos q} = 9{,}9996894-10.$	$\log \text{Sin q} = 8{,}5775660-10.$
$\log \text{Cos k} = 9{,}9987585-10.$	$10{,}2389634-10.$
$k = 4°\,,,19'\,,,57''.$	$z = 60°\,,,1'\,,,23''.$

Ferner ist in der Formel I. $\text{tang}\,\mu = \text{Cos z} \,.\, \text{tang k}.$

$\log \text{Cos z} = 9{,}6986671-10.$	$\log \text{Cos k} = 9{,}9987585-10.$
$\log \text{tang k} = 8{,}8794447-10.$	$\text{l.Sin(L+k)} = 9{,}8878394-10.$
$\text{l. tang}\,\mu = 8{,}5781118-10.$	$9{,}8865979-10.$
$\mu = 2°\,,,10'\,,,4.$	$\log \text{Cos}\,\mu = 9{,}9994683-10.$
$L = 48\,,,24\,,,6.$	$\text{l. Sin L}' = 9{,}8871296-10.$
$L + \mu = 50\,,,34\,,,10.$	$L' = 50°\,,,27'\,,,20''.$

Nimmt man ferner das Axenverhältniß unserer Erdellipsoide wie 150:149 an, so ist $\mu = \frac{1}{1}\frac{4}{5}\frac{9}{0}$; $\mu^2 = \frac{2}{2}\frac{2}{2}\frac{2}{5}\frac{0}{0}\frac{1}{0}$;

$\log \mu^2 = 0{,}9941900-1$; $1-\mu^2 = \varepsilon^2 = \frac{2}{2}\frac{2}{2}\frac{9}{5}\frac{9}{0}$;

$1-\varepsilon^2 = 0{,}9867111$; $\log \varepsilon^2 = 0{,}1234887-2.$

$\frac{1}{2}(L'+L) = \frac{1}{2}.(50\,,,27'\,,,20''+48°\,,,24'\,,,6'') = 49°\,,,25'\,,,43''$;

$\frac{1}{2}(L'-L) = 1°\,,,1'\,,,37''.$

log

$\log 2 = 0,3010300.$
$\log s^2 = 0,1234887 - 2.$
$\text{l. Cos } \frac{1}{2}(L' + L) = 9,8131772 - 10.$
$\text{l. Sin } \frac{1}{2}(L' - L) = 8,2536007 - 10.$
$\text{l. Cos } L = 9,8038679 - 10.$
$\text{l. } 206264 = 5,3144252.$

$4,6095897 - 3.$

$OBM = 40'',699.$

Mithin die geographische Breite des Ortes B
$= 50° \,„ 27' \,„ 20 - 40',699 = 50° \,„ 26' \,„ 39'',3.$

f. Was endlich die geogr. Längen-Differenz der Orte A „B anbelangt, so ist nach (II.)

$\log \text{Sin } K = 8,8782020 - 10.$
$\log \text{Sin } Z = 9,9376314 - 10.$

$8,8158334 - 10.$
$\text{l. Cos } L' = 9,8040226 - 10.$

$\log M = 9,0118108 - 10.$
$M = 5° \,„ 53' \,„ 15''.$

g. Bey der geographischen Aufnahme der Kön. Baierischen Monarchie wurde der Erdhalbmesser für München, dessen geogr. Breite $48° \,„ 8' \,„ 24''$ ist, für den Halbmesser der Sphäre substituirt, welche diesen Staat auf dem Erdellipsoid osculiret.

Auch wurde die Ellipticität unserer Erde zu 303 : 304 angenommen, und nach derselben jener Halbmesser zu 21809110 Baier. Fußen oder 6365206,8 Meter berechnet.

Setzt man diesen Halbmesser $= \varrho$; so ist $2\pi\varrho$ der Umfang des Aequators jener Sphäre; mithin ein Grad derselben $\frac{1}{180} . \pi . \varrho.$

$\log \pi = 0,4971498.$
$\log \varrho = 7,3386380.$

$7,8357878.$
$\log 180 = 2,2552725.$

$5,5805153.$
im Grad $= 380640,2$ Baier. Fuße.

Ein Bogen von 8000 Fußen mißt daher auf dieser Sphäre einen Centerwinkel von 75,662 Secunden.

Wenn die Differenzen nur klein sind.

II. Sind die Coordinaten des Punctes B Fig. 44. nur klein, so ist auch der Bogen AB von dem Perpendikel BH, um so weniger verschieden, je kleiner BH und AH ist; und die Logarithmen geben daher den Bogen AB um so unsicherer an.

a. Ich setze deswegen $AB = BH + x$; oder $K = p + x$; so ist einmal

$$\text{Cos}\,(p + x) = \text{Cos}\,p \,.\, \text{Cos}\,q\,; \quad \text{oder}$$

$$\text{Cos}\,p \,.\, \text{Cos}\,x - \text{Sin}\,p \,.\, \text{Sin}\,x = \text{Cos}\,p \,.\, \text{Cos}\,q\,; \quad \text{oder auch}$$

$$\text{Cos}\,p - x \,.\, \text{Sin}\,p = \text{Cos}\,p \,.\, \text{Cos}\,q \,. \text{ beinahe.}$$

Nun ist aber $\text{Cos}\,q = 1 - \frac{1}{2} q^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{4} q^4$; mithin auch

$$\text{Cos}\,p - x \,.\, \text{Sin}\,p = \text{Cos}\,p \,.\, (1 - \tfrac{1}{2} q^2 + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{4} q^4)\,; \quad \text{oder}$$

$$x = \tfrac{1}{2} q^2 \,.\, (1 - \tfrac{1}{1}\tfrac{1}{2} q^2) \,.\, \text{Cotang}\,p\,; \quad \text{also}$$

$$K = p + \tfrac{1}{2} q^2 \,.\, (1 - \tfrac{1}{1}\tfrac{1}{2} q^2) \,.\, \text{Cotang}\,p \,.\, 206264.$$

b. Da ferner nach (I.) $\text{Sin}\,L' = \text{Cos}\,Z \,.\, \text{Cos}\,L \,.\, \text{Sin}\,K + \text{Sin}\,L \,.\, \text{Cos}\,K$ ist, so ist auch

$$\text{Siu}\,L' - \text{Sin}\,L = \text{Cos}\,Z \,.\, \text{Cos}\,L \,.\, \text{Sin}\,K + \text{Sin}\,L \,.\, \text{Cos}\,K - \text{Sin}\,L.$$

$$= \text{Cos}\,Z \,.\, \text{Cos}\,L \,.\, \text{Sin}\,K - (1 - \text{Cos}\,K) \,.\, \text{Sin}\,L \,.$$

$$= \text{Cos}\,Z \,.\, \text{Cos}\,L \,.\, \text{Sin}\,K - 2\,\text{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,K \,.\, \text{Sin}\,L\,; \quad \text{oder}$$

$$2\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\,(L' + L) \,.\, \text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,(L' - L) = \text{Cos}\,Z \,.\, \text{Cos}\,L \,.\, \text{Sin}\,K - 2\,\text{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,K \,.\, \text{Sin}\,L\,; \quad \text{also}$$

$$\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,(L' - L) = \frac{\text{Cos}\,Z \,.\, \text{Cos}\,L \,.\, \text{Sin}\,K - 2\,\text{Sin}^2\,\frac{1}{2}\,K \,.\, \text{Sin}\,L}{2\,\text{Cos}\,\frac{1}{2}\,(L' - L)}\,.$$

Setzt man nun $L' = L + \Delta L$; so ist auch

$$L' - L = L + \Delta L - L = \Delta L\,;$$

und $L' + L = 2L + \Delta L$; mithin auch

$$2\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,\Delta L = \frac{\text{Cos}\,Z \,.\, \text{Cos}\,L \,.\, \text{Sin}\,K - 2\,\text{Sin}^2 \,.\, \frac{1}{2}\,K \,.\, \text{Sin}\,L}{\text{Cos}\,(L + \frac{1}{2}\,\Delta L)}\,;$$

oder

oder $2 \sin \frac{1}{2} \Delta L (\cos L . \cos \frac{1}{2} \Delta L - \sin L . \sin \frac{1}{2} \Delta L)$
$= \cos Z . \cos L . \sin K - 2 \sin^2 \frac{1}{2} K . \sin L .$
oder $2 \sin \frac{1}{2} \Delta L . \cos L . \cos \frac{1}{2} \Delta L$
$= \cos Z . \cos L . \sin K - 2 \sin^2 \frac{1}{2} K . \sin L + 2 \sin^2 \frac{1}{2} \Delta L . \sin L .$

Ist nun ΔL und K so klein, daß man seinen Bogen mit seinem Sinus ohne merklichen Fehler verwechseln kann, so ist auch für $\cos \frac{1}{2} \Delta L = 1$. also

$\Delta L . \cos L - \frac{1}{2} \Delta L^2 . \sin L = \cos Z . \cos L . K - \frac{1}{2} K^2 . \sin L ;$

oder

$\Delta L^2 \sin L - 2 \Delta L \cos L = -2 K . \cos Z . \cos L + K^2 . \sin L ;$

oder

$\Delta L^2 - 2 \Delta L . \text{Cotang } L = -2 K . \cos Z . \text{Cotang } L + K^2 ;$

oder

$2 \Delta L . \text{Cotang } L = 2 K . \cos Z . \text{Cotang } L - K^2 - \Delta L^2 .$

Hieraus ergiebt sich

$$\Delta L = \frac{2 K . \cos Z . \text{Cotang } L - K^2 + \Delta L^2}{2 \text{ Cotang } L} ;$$

$$\Delta L = K \cos Z - \tfrac{1}{2} K^2 . \text{tang } L - \tfrac{1}{2} \Delta L^2 . \text{tang } L .$$

Substituirt man in diesen Ausdruck den Werth von $\Delta L^2 = K^2 . \cos Z^2 - \frac{1}{2} K^3 . \cos Z . \text{tang} L - \frac{1}{2} K^3 . \cos Z^2 + \frac{1}{4} K^4 \text{tang} L$ und lässet dabey die höhern Potenzen hinweg, so ist auch

$\Delta L = K \cos Z - \frac{1}{2} K^2 . (1 - \cos^2 Z) \text{ tang } L ;$ oder

$\Delta L = K . \cos Z - \frac{1}{2} K^2 . \sin^2 Z . \text{tang } L .$

Setzt man ferner den Winkel $OBM = \psi$, so ist auch nach (I.)

$\psi = 2 . \varepsilon^2 \cos \frac{1}{2} (L' + L) . \sin \frac{1}{2} (L' - L) . \cos L'$ oder

$\psi = 2 . \varepsilon^2 . \cos (L + \frac{1}{2} \Delta L) . \sin \frac{1}{2} \Delta L . \cos L' .$

Weil nun ΔL hier immer nur klein ist, und deswegen $L' = L$ beinahe ist, so ist auch

$\psi = \varepsilon^2 \Delta L . \cos^2 L = \varepsilon^2 . \cos L . (K \cos Z - \frac{1}{2} K^2 \sin^2 Z . \text{tang} L) ;$

Mithin auch die Breite des Punctes B, oder

$L' = L + \Delta L - \psi = L + \Delta L\,(1 - \varepsilon^2 \operatorname{Cos}^2 L)$; oder

$L' = L + (K \operatorname{Cos} Z - \frac{1}{2} K^2 . \operatorname{Sin}^2 Z . \operatorname{tang} L) . (1 - \varepsilon^2 \operatorname{Cos}^2 L) . 206264.$

c. Eben so ist auch nach (I.) die Längen-Differenz der Puncte A und B, oder

$$M = \frac{K . \operatorname{Sin} Z}{\operatorname{Cos} L} . 206264 .$$

wobey $K = p + \frac{1}{2} q^2 . (1 - \frac{1}{1\,2} q^2) . \operatorname{Cotang} p . 206264.$ ist.

Auch ist $\operatorname{tang} Z = \operatorname{tang} p : \operatorname{Sin} q$.

Es seyen z. E. die Coordinaten für den Punct B befunden worden nach §. 15. V.;

$p = 0° \,„\, 36' \,„\, 40''$; $q = 0° \,„\, 20' \,„\, 40''$; und $L = 48° \,„\, 24' \,„\, 6''$;

so ist einmal

im Bogen $q = 0{,}00601\,16897.$

$\log q^2 = 9{,}5579946 - 14.$

$\log \frac{1}{1\,2} q^2 = 8{,}4788134 - 14.$

$\frac{1}{1\,2} q^2 = 0{,}00000\,30117.$

also $1 - \frac{1}{1\,2} q^2 = 1.$ beinahe.

$\log q^2 = 9{,}5579946 - 14.$

l. $\operatorname{Cotang} p = 11{,}9700162 - 10.$

l. $206264 = 5{,}3144252.$

$26{,}8424360 - 24.$

$\log 2 = 0{,}3010300.$

$4{,}5414060 - 2.$

$347'',84;$

also ist $K = 0° \,„\, 36' \,„\, 40 + 5' \,„\, 47{,}84 = 0° \,„\, 42' \,„\, 27''84.$

Ferner ist $\log \operatorname{tang} p = 8{,}0220506 - 10.$

$\log \operatorname{Sin} q = 7{,}7789939 - 10.$

$\log \operatorname{tang} Z = 10{,}2430567 - 10.$

$Z = 60° \,„\, 15' \,„\, 20.$

Auch

Auch ist im Bogen K = 0,0123522 . . . . ; und

log tang L = 10,0516899—10.
log Sin Z^2 = 19,8772914—20.
log K^2 = 8,1834746—12.
38,1124559—42.
log 2 = 0,3010300.
4,8114259— 9.
0,000064778.

log K = 4,0917373— 6.
log Cos Z = 9,6955902—10.
4,7873275— 7.
0,0061281.

0,0061281.
0,00006477.
0,0060633. log = 4,7827029—7.

log i^2 = 0,1234887 — 2.
log Cos L^2 = 19,6442206—20.
4,7677093 — 7.
0,0058574.
1
0,9941426.
log 4,9974475—5.

4,7827029—7.
4,9974475—5.
5,3144252 = log 206264.
4,0945750—3.
1243,3 Secunden.

also ist

$L' = 48° \,„ 24' \,„ 6'' + 0° \,„ 20' \,„ 43,3 = 48° \,„ 44' \,„ 49'',3$;

die verlangte geograph. Breite des Ortes B in Fig. (44.)

Was ferner die Längen-Differenz der Orte A und B anbelangt, so ist

$$M = \frac{\text{Sin K} \,.\, \text{Sin Z}}{\text{Cos L}} .$$

log K = 4,0917373—6.
l. Sin Z = 9,9386457—10.
log 206264 = 5,3144252,
19,3448082—16.
log Cos L = 9,8221103—10.
4,5226979— 1.

M = 33331,9 Secunden.

Die Längen-Differenz der Orte A und B wäre also

55′ „31,9. Secunden.

d. Da

d. Da ferner der Halbmesser des Parallels durch B gleich a . Cos L′ : $\sqrt{(1 - \varepsilon^2 . \text{Sin}^2 . L)} = Z$ ist; so ist auch der Umfang desselben $2\pi Z$; mithin die Größe eines Grades auf diesem Parallel

$$= \frac{1 \; . \; \pi . a . \text{Cos } L'}{180 \sqrt{(1 - \varepsilon^2 . \text{Sin}^2 . L')}} .$$

Bestimmung der Längendifferenz zweier Orte, aus ihren Polhöhen und Azymuth.

III. Sind die Orte A und B sich so nahe, daß man von einem zum andern sehen kann, und der Geograph mißt die Polhöhen beider Orte, und in A das Azymuth PAB derselben, so lässet sich nach diesen gemessenen Winkeln ihre Längendifferenz, oder der Winkel APB folgendermaßen berechnen.

Corrigiret nemlich der Geograph vorerst die in B gemessene Polhöhe durch den Abweichungswinkel seiner Lothlinien von dem Punct M auf der Erdaxe (I.), so sind nun in dem Dreyeck APB bekannt die Seiten AP„ BP„ und der Winkel PAB; mithin

$$\text{Sin PB} : \text{Sin BAP} = \text{Sin AP} : \text{Sin ABP}$$

$$\text{Sin ABP} = \frac{\text{Sin AP}}{\text{Sin BP}} \text{ Sin PAB.}$$

Ferner ist nach der sphärischen Trigonometrie auch

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} \text{ ABP} = \frac{\text{Cos } \frac{1}{2} (BC - AC)}{\text{Cos } \frac{1}{2} (BC + AC) . \text{ tang } \frac{1}{2} (PAB + PBA) .}$$

woraus sich also die halbe Längendifferenz beider Orte berechnen lässet.

Wäre der Ort A nicht jener selbst, für welchen die osculirende Sphäre berechnet worden, sondern statt dessen ein anderer, der eine von diesem verschiedene geographische Breite hat, so müßte man seine gemessene Polhöhe zuvor durch den Abweichungswinkel seiner Schwer-

linie

linie von jener des A corrigiren, ehe man die Seite AP des Dreyecks in Rechnung bringt.

Bestimmung der Längendifferenzen durch Blickfeuer.

IV. Bekanntlich verbreitet sich das Licht mit einer so außerordentlichen Geschwindigkeit in unserer Atmosphäre, daß man die Zeit für unmeßbar annehmen kann, in welcher das Licht die größten auf der Erde, und in ihrer Atmosphäre noch zu bestimmende Weiten passiret.

Wenn daher in A eine Pulvermasse entzündet wird, deren Flamme man in B sehen kann, so fällt der Augenblick der Explosion für A und B in ein und eben denselben untheilbaren Zeitmoment; es dauert dabey die Explosion selbst um so länger an, je größer die Pulvermasse ist.

Zählet man nun in dem Moment der Explosion an dem Orte A nach einer guten Pendeluhr die Zeit (a), an dem Orte B aber die Zeit (b), so ist nach der täglichen Bewegung der Erde, bekanntlich die Längendifferenz beider Orte = 15. (a—b).

Dabey findet sich nun die Längendifferenz um so genauer, je zuverlässiger beide Beobachter in A und B die Zeit des wahren Mittags, oder noch besser, für Nachtsignale die Zeit der Mitternacht ihres Orts kennen, um den Gang ihrer Uhren darnach zu beurtheilen, — je schneller ferner das Pulver nach seiner Güte und geringen Masse sich entzündet, oder je kürzer die Dauer der Explosion ist — und je sorgfältiger man die Momente der Entzündung an den Uhren beobachtet.

Rücksichtlich dessen lehret nun die Erfahrung, daß einer Pulvermasse von 4 bis 6 Lothen sich augenblicklich ganz entzündet, und eine Flamme um sich verbreitet, die

zu

zu Nachts bey reiner Luft auf 8 bis 10 Meilen gesehen wird; die Flamme einer Masse von 12 bis 16 Lothen endet eben so fast momentan, und wird auf 30 und mehrere Meilen gesehen; ja selbst der Reflex ihres Lichts in der Atmosphäre ist auf diese Weite für das Auge empfindbar.

Bey den auf der Sternwarte zu Seeberg von Hrn. Professor Bürg, und auf dem Schneekopf von Hrn. Oberhofmeister von Zach veranstalteten Pulverexplosionen gaben sich folgende Längendifferenzen für Seeberg und Inselberg.

Signal.	Seeberg.	Schneekopf.	Längendifferenz.
			° ′ ″
I.	5 Uhr. 5′ „ 46,0	5 Uhr. 5′ „ 54	0 „ 0 „ 7,4
II.	— 56 „ 55,0	— 57 „ 3,1	8,1
III.	6 — 1 „ 40,5	6 — 1 „ 48,1	7,6
IV.	— 6 „ 45,7	— 6 „ 53,6	7,9
V.	— 10 „ 4,3	— 12 „ 12,1	7,8
VI.	— 16 „ 46,0	— 16 „ 54,1	8,1
VII.	— 21 „ 46,2	— 23 „ 53,6	7,7
VIII.	— 26 „ 45,9	— 26 „ 54,1	7,9
IX.	— 31 „ 46,3	— 31 „ 54,1	7,8
X.	— 36 „ 46,3	— 36 „ 53,5	7,2
XI.	— 41 „ 46,0	— 41 „ 53,7	7,7
XII.	— 46 „ 45,7	— 46 „ 53,5	7,8

Aufnahme von Thüringen und dem Eichsfeld vom Freyherrn von Zach, Gotha 1806. S. 184.

Das Mittel aus allen diesen Beobachtungen giebt daher die Längendifferenz zwischen der Sternwarte zu Seeberg, und der Kuppe des Inselberges gerade 7,75 Secunden mittlerer Zeit.

Auch

Auch ist die größte Abweichung dieser Beobachtungen 8,1 — 7,2 oder 0,9 Secunden; sie weichen von dem Mittel um 8,1 — 7,75 oder 0,35 und 7,75 — 7,2 oder 0,55 Secunden ab.

Geübte Beobachter, wenn sie mit guten Pendeluhren versehen sind, und die Zeiten des Mittags oder auch der Mitternacht ihres Orts aufs sorgfältigste bestimmen, können daher nach diesem bey heiterer Atmosphäre öfters angestellten Verfahren, die Längendifferenz zweier Orte immer bis auf $\frac{1}{2}$ Zeitsecunde, oder auf $7\frac{1}{2}$ Secunden im Bogen sicher bestimmen.

Uebrigens kann man durch dieses Verfahren immer die Längendifferenz zweier Orte von einem zwischen ihnen inliegenden (Z) finden, wenn man auf dem Orte (Z) die Pulversignale giebt; man findet aus denselben die Längendifferenz so vieler Orte gleichzeitig, als man auf ihnen die Signale in Z gehörig beobachten konnte.

Sind auf diese Art die Längendifferenzen solcher Orte durch die Signale in Z gefunden, so kann man aus diesen andere bestimmen, wenn man gegebenen Orts wieder Signale giebt, welche weiters gesehen werden können: man kann auf diese Art die Längendifferenzen der Orte eines ganzen Reichs, innerhalb seiner Gränzen bestimmen.

Auf ähnliche Art findet man auch aus dem Unterschied der Zeiten, in welchen an verschiedenen Orten, die Eintritte des Mondes, und der untern Planeten vor die Sonnenscheibe, oder die Sterne an der Mondsscheibe und die Eintritte der Jupiters-Trabanten in den Schatten ihres Planeten gesehen werden, ihre Längendifferenzen; man findet sie auch aus den Abständen der Sonne und der Sterne vom Monde.

Chronometrische Bestimmung der Längen-Differenzen.

V. Außer den in (I. II.) angeführten Methoden, die Längendifferenzen, zu finden, gewähret der Gebrauch der Chronometer oder tragbaren Zeithalter ein sehr einfaches Mittel, die Längendifferenzen selbst solcher Orte zu finden, die außerordentlich weit, oder in jedem Abstand auf der Erde von einander liegen.

Diese Methode gründet sich zunächst auf die Bestimmung des Zeitunterschieds, um welchen ein himmlischer Körper, den Meridian eines Orts A früher oder später als den Meridian eines andern Ortes B passiret; es ist die Längendifferenz beider Orte so viel Grade, als jener Unterschied 4 Zeitminuten enthält.

Könnte man nun einen Chronometer verfertigen, welcher die Zeit mit mathematischer Genauigkeit angäbe, so könnte man mit demselben auch die Längendifferenzen zweier Ort in soweit aufs richtigste bestimmen, als nicht Fehler bey Beobachtung der Culminationen, und in Bestimmung der Meridianebenen beider Orte, oder in Bestimmung des wahren Mittags jedes Orts vorfallen.

Statt dessen aber lehret die Erfahrung, daß selbst die aufs sorgfältigste bearbeiteten Chronometer immer gewisse Abweichungen in ihrem Gange zeigen, wornach sie innerhalb 24 Stunden, nicht immer um gleich viel voreilen oder zurückbleiben; und daß sich diese tägliche Variation auf 24 Stunden selbst bis auf etliche Secunden erstrecken kann.

So zeigte z.E. ein von Emmerich in London mit größtem Fleiße verfertigter Chronometer, folgende Differenzen, nach den Prüfungen, welche der Hr. Graf von Brühl mit demselben, vermittelst correspondirender Sonnenhöhen vorgenommen hatte.

März.	Zeit, welche die Uhr gewiesen.	Mittlere Zeit im wahren Mittag.	Unterschied beider.	Täglicher Gang der Uhr.
	St. ′ ″		′ ″	
5	0„13„ 8,5	0„11„36,29	+1„31,60	
7	0„12„38,44	0„11„ 7,20	1„31,24	+″ 0,18
8	0„12„21,90	0„10„51,80	1„30,10	1,14
12	0„11„18,60	0„ 9„46,61	1„32,00	0,47
14	0„10„45,55	0„ 9„12,60	1„33,05	0,52
15	0„10„28,48	0„ 8„55,10	1„33,38	0,53

Wäre nun der Gang des Chronometers sich immer gleich geblieben, so würde er an jedem Mittage der Sonne um 1′„ 31″,60 vorgeeilt haben; da er aber am 7ten März der Sonne um 1′„ 31″,24 vorgieng, so war sein Gang inerhalb der 2 Tage um $\frac{1}{2}$.(60—24) = 0,18 Secunden variabel.

Da er ferner am 8ten März um 1′„ 30″,10 und am 12ten März 1′„ 32″ voreilte, so variirte sein Gang innerhalb der 4 Tage um 1′„ 32 — 1′„ 30″,10 = 1′,9. Secunden; dieß trift auf einen Tag in den andern 0,47 Secunden.

Addiret man diese Variationen für mehrere Tage zusammen, und theilet die Summe durch ihre Anzahl, so erhält man in dem Quotienten, die mittlere ausgegleichte tägliche Variation des Chronometers.

Diese mittlere Variation seines Chronometers muß nun der Geograph zuvörderst, durch die Beobachtungen der Culminationen aufsuchen, um sie nachgehends bey den Längenbestimmungen in Rechnung bringen zu können; er findet sie um so sicherer, je größer die Zahl seiner Beobachtungen ist.

Solche Betrachtungen stellet ferner der Geograph vorerst an jenem Standort an, der in dem ersten Meridian

dian des Landes für den Fußpunct der Coordinaten gilt, §. 15. V.; von welchem aus er sich nachgehends mit seinem Chronometer an jene Standpuncte verfüget, deren Länge er durch denselben bestimmen will.

Will nun der Geograph die geographische Lage eines Standpuncts B finden, so bestimmet er zuvörderst mit seinem Höhenmesser die Meridianebene desselben, und seine Polhöhe aufs genaueste; er passet nachgehends die Zeitmomente an seinem Chronometer ab, in welchem die Sonne und Sterne dem Meridian culminiren; und bringet nun an denselben jene Correctionen an, welche das Voreilen oder Verspäten des Chronometers, seine mittlere tägliche Variation, und die Zeitgleichung mit sich bringen.

Um diese Methode durch ein Exempel zu erläutern, lege ich die Längenbestimmung zum Grunde, welche der Begründer dieser Methode, Hr. Oberst Hofmeister Baron von Zach, mit der See-Uhr des Hrn. Mudge für Gotha und London ausgeführt hatte.

Nach einer Beobachtung, welche Hr. von Zach auf der Sternwarte des Grafen von Brühl zu Doverstreet in London angestellt hatte, gieng nemlich der Zeithalter im Jahr 1786 den 29 May, um 2″,10 zu spät gegen mittlerer Zeit.

Was ferner die tägliche Variation der Uhr anbelangt, so wurde dieselbe vom 28 Februar bis 29 May, also innerhalb 90 Tagen, 41 mal im Meridian observirt; und es ergab sich durch 17 Beobachtungen eine positive Variation von 6″,873, und durch 24 Beobachtungen eine negative von 13″,905; so daß sich also für die mittlere tägliche Variation ein Verspäten von 0″,1715 ergab.

Als nun Hr. von Zach in dem Meridian des Schlosses Friedenstein in Gotha am 27 Julii dieses Jahrs die Culmination der Sonne beobachtete, fand er für dieselbe 11 Uhr ″ 19′„3″,40.

Nun

Nun ist aber vom 29 May bis 27 Junii, oder innerhalb 29 Tagen, die Verspätigung der Uhr —0,1775.29 = —4″,9735.

Das Zurückbleiben der Uhr am 29 May zu London selbst —2″,10; die Uhr würde also in London selbst am 29 Junii um —7″,0735 zurückgeblieben seyn.

Da nun für diesen Tag die Zeitgleichung 0 St. „ 2′ „ 34″,3 ist, so wäre die wahre Zeit für Doverstreet an diesem Tage gewesen 0 Uhr „ 2′ „ 27″,2265; da sie in Gotha war 11 U. „ 19 „ 3,4000; daher

Meridian-Differenz 33′ „ 23″ „ 8265. in mittl. Zeit.

Am 29 Junii passirte ferner der Mittelpunct der Sonne den Meridian zu Gotha um 11 U. „ 19′ „ 27″,40.

Die mittlere Variation der Uhr ist daher —0″,1715.31 . .	—5″,3165.
Die Verspätignng derselben am 29 May zu London . . .	—2 „ 1.
also blieb die Uhr am 29 Junii zurück	—7,4165.
Die Zeit des wahren Mittags ist ferner in mittlerer Zeit . .	0 U. „ 2 „ 58, 9.
also die Zeit des wahren Mittags in London	0 U. „ 2 „ 51,4835.
in Gotha	11 U. „ 19 „ 27,40.
Meridian-Differenz	0 U. „ 33 „ 24,0835.

Auf diese Art kann daher der Geograph vermittelst seines Höhenmessers, und seines Zeithalters die geographische Länge und Breite jedes gewählten Standpuncts bestimmen.

Immer ist es daher räthlich, die Variation des Zeithalters von Zeit zu Zeit zu untersuchen; weil die Motive, welche dieselbe veranlassen, mit der Spannung der

Feder,

Feder, mit dem Zustand der Oelung, und mit mancherley andern Umständen in Beziehung sind, auf welche die Wärme und Feuchtigkeit der Luft Einfluß haben; wenn auch der Zeithalter, wie gewöhnlich, mit einer Vorrichtung versehen ist, welche die pyrometrische Einwirkung compensiren soll.

Abweichung der Erdellipsoide von ihrer sie osculirenden Sphäre.

VI. Berühret die osculirende Sphäre von dem Halbmesser AM in (I.) in Fig. 45. das Erdellipsoid in dem Puncte A, so überschneidet, und unterschneidet sie dasselbe nördlich und südlich von diesem Punct um so mehr, je weiter sie sich über ihn verläuft.

Ist z. E. die nördliche Breite des Ortes $A = L$ und eines andern Ortes $U = K$, so überschneidet die Sphäre die Ellipse allda um UZ; und es ist

$$UZ = CZ - CU.$$

Nun ist aber in dem Dreyeck CMZ bekannt die Seite $ZM = AM$; die Seite CM, und der Winkel $PMZ = 90 - K$; mithin $CZ = CM \,.\, \mathrm{Sin}\, CMZ : \mathrm{Sin}\, CZM$.

Ferner ist nach §. 2. III.

$$AM = a : \sqrt{(1 - \varepsilon^2 . \mathrm{Sin}^2 L)}; \quad CM = a \,.\, \varepsilon^2 . \mathrm{Sin} L : \sqrt{(1 - \varepsilon^2 . \mathrm{Sin}^2 L)}$$

$$CU = a \,.\, \sqrt{\left(1 - \frac{\varepsilon^2 . (1 - \varepsilon^2) . \mathrm{Sin}^2 . K}{1 - \varepsilon^2 . \mathrm{Sin}^2 . K}\right)}.$$

Es sey z. E. die geogr. Breite des Ortes $A = 40$ Grade; des Ortes $U = 56$ Grade. Die Excentricität $\mu = 149 : 150$; also $\varepsilon^2 = 299 : 22500$ nach (I. e.) der Halbmesser des Aequators $a = 6375140$ Meter; so ist einmal

log

$\log \varepsilon^2 = 0{,}1234887-2$
$\text{l. Sin } L^2 = 19{,}5161350-20$

$4{,}7396237-7$

Absolutzahl $= 0{,}0054907$

I

$0{,}9945093$

$\text{l.}(1-\varepsilon^2 \text{Sin}^2 L) = 3{,}9976092-4$

$1{,}9988046-2$

$\log a = 16{,}8045308-10$

$6{,}8057262$

$AM = 6393300$ Meter.

$\log a = 6{,}8045308-0$
$\text{l. } \varepsilon^2 . \text{Sin } L = 4{,}9395562-7$

$11{,}7360870-7$

$\text{l.} \sqrt{(1-\varepsilon^2 \text{Sin}^2 L)} = 1{,}9988046-2$

$4{,}7372824-0$

$CM = 54612$ Meter.

$\log \varepsilon^2 = 0{,}1234887-2$
$\text{l. Sin } K^2 = 19{,}8371484-20$

$4{,}9606371-7$

$\text{l.}(1-\varepsilon^2) = 0{,}9941900-1$

$4{,}9548271-7$

$\log \varepsilon^2 . \text{Sin}^2 . K = 4{,}9606371-7$

Absolutzahl $= 0{,}0091335$

I

$0{,}9908665$

$\log(1-\varepsilon^2 \text{Sin } K^2) = 3{,}9960123-4$

$4{,}9548271-7$

$0{,}9588148-3$

Absolutzahl $0{,}09090952$

I

$0{,}9909048$

$\log \sqrt{0{,}9909048} = 1{,}9980149-2.$
$\log a = 6{,}8045308.$

$6{,}8025457.$

$CU = 6346700$ Meter, $= 0{,}99545 . a.$

Ferner ist die Tangente des Center-Winkels UCE $= \mu^2 . \text{tang } K$; oder $\text{tang UCE} = \left(\frac{149}{150}\right)^2 . \text{tang } 56° \,„ \ldots$

log

$\log \mu^2 = 0{,}9941900 - 1.$
$\text{l. tang K} = 10{,}1710126 - 10.$
$\text{l. tang UCE} = 10{,}1652026 - 10.$
$\text{UCE} = 55^\circ\,{}''\,38'\,{}''\,37''$
$90\;{}''\,-\,{}''\,-$
$\text{ZCM} = 145\;{}''\,38\;{}''\,37.$

Ferner ist in dem Dreyeck ZCM.

ZM:Sin ZCM = CM:Sin CZM.	Sin CZM:CM = Sin CMZ:CZ.
log CM = 4,7372824	log CM = 4,7372824
l. Sin ZCM = 9,7515400—10	l. Sin CMZ = 9,7484531—10
14,4888224—10	14,4857355—10
l. AM = 6,8057262	l. Sin CZM = 7,6830962—10
7,6830962—10	6,8026393
CZM = 0°,,16′,,37″	CZ = 6348000
145 ,, 38 ,, 37	CU = 6346700
145 ,, 55 ,, 14	UZ = 1300 Meter.
180 ,, — ,, —	
CMZ = 34 ,, 4 ,, 46	

Die Sphäre, welche den Parallel von 40 Graden osculiret, überschneidet daher die Ellipse in den Parallel von 56 Graden erst um 1300 Meter. Dieß trift auf einen Grad der Breitendifferenz in den andern $\frac{1300}{16}$ oder 83 Meter.

Setzt man K = 90 Grade, so geht die Linie CU in die Erdaxe $CP' = 6333235$ Meter selbst über; und die Sphäre überschneidet den Pol P um

$P'P = (6393300 - 54612) - 6333235 = 5453$ Meter.

Man kann sich daher der osculirenden Sphäre für die Berechnung der Längen- und Breitendifferenzen (II.) der Orte, selbst eines großen Staates, ohne merklichen Fehler statt des Erdellipsoids selbst bedienen. Man erhält deswegen

wegen auch einerley Formeln für diesen Zweck, wenn man die Linien auf dem Ellipsoid selbst berechnet, oder statt dessen seine osculirende Sphäre zum Grunde legt.

Die Sphäre, welche das Ellipsoid der Erde in 3 Puncte schneidet.

VII. Wollte man für einen außerordentlich großen Staat, z. E. für ganz Asien die Sphäre berechnen, welche denselben in seinem mittlern und in seinen beiden äußersten Parallelen durchschneidet, so würde diese Sphäre noch weniger als die in (III.) von dem Erdellipsoid abweichen, und ihr Halbmesser würde sich folgendermaßen berechnen lassen.

Es sey in Fig. 1. EWA der Quadrant des elliptischen Meridians, nach welchem der Geograph die Coordinaten seines Triangularnetzes berechnet hat (IV.); diesen schneidet der südlichste Parallel des Landes unter der geographischen Breite $= \alpha$ in dem Puncte Z, und der nördlichste unter der Breite $= \beta$ in dem Puncte U; so daß also der mittlere Parallel des Landes durch den Punct W des Meridians in der Breite $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ gehet.

a. Denkt man sich von diesen Puncten Centrallinien nach der Mitte C der Erde, so kann man aus ihnen, und den sie einschließenden Centralwinkeln die Chorden ZW„ UW und den Winkel ZWU berechnen, und so nach §. 2. IV. den Halbmesser der Sphäre finden, die durch die 3 Puncte Z„ W„ U des elliptischen Quadranten gehet.

Bezeichnet nun $1 : \mu$ das nach (V.) berechnete, oder sonst angenommene Axenverhältniß der Ellipse des Landes, so ist einmal

$$\text{tang ECZ} = \mu^2 \cdot \text{tang } \alpha = \text{tang A} \cdot \text{§. 2. II.};$$
$$\text{tang ECU} = \mu^2 \cdot \text{tang } \beta = \text{tang B};$$
$$\text{ZCW} = \text{WCU} = \tfrac{1}{2}(\text{A}+\text{B}).$$

Es sey nun $\alpha = 40°\,,,\,0'$; $\beta = 56°\,,,\,0'$; und nach (V.) LE : AC = 1 : μ = 150 : 149 berechnet worden; so ist hier

$$\mu = \frac{149}{150};\quad \mu^2 = \frac{22201}{22500};\quad \log \mu^2 = 0{,}9941900 - 1;$$

$$1 - \mu^2 = \varepsilon^2 = \frac{299}{22500};\quad 1 - \varepsilon^2 = 0{,}9867111\ldots$$

$$\log \varepsilon^2 = 0{,}1234887 - 2;\quad \log (1 - \varepsilon^2) = 0{,}9941900 - 1.$$

$\log \mu^2 = 0{,}9941900 - 1.$	$\log \mu^2 = 0{,}9941900 - 1.$
$\log \text{tang}\, \alpha = 9{,}9238135 - 10.$	$\text{l. tang}\, \beta = 10{,}1710126 - 10.$
$\text{l. tang}\, A = 9{,}9180035.$	$\text{l. tang}\, B = 10{,}1652026.$
$A = 39°\,,,\,37'\,,,\,23''.$	$B = 55°\,,,\,38'\,,,\,37''.$

$$\tfrac{1}{2}(A + B) = 47°\,,,\,38'\,,,\,0'' = ECW.$$

b. Nun ist ferner nach §. 2. III. für EC = 1;

$$CZ = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2 . (1 - \varepsilon^2) . \text{Sin}\, \alpha^2}{1 - \varepsilon^2 . \text{Sin}\, \alpha^2}}.$$

$\log \varepsilon^2 = 0{,}1234887\text{-}2$	$\log \varepsilon^2 . \text{Sin}\, \alpha^2 = 4{,}7396237\text{-}7$
$\text{l. Sin}\, \alpha^2 = 19{,}6161350\text{-}20$	$\log (1 - \varepsilon^2) = 0{,}9941900\text{-}1$
$4{,}7396237\text{-}7$	$4{,}7338137\text{-}7$
Absolutzahl = $0{,}0054907$	$\text{l.}(1 - \varepsilon^2 . \text{Sin}\, \alpha^2) = 4{,}9976092\text{-}5$
I	$4{,}7362045\text{-}7$
$1 - \varepsilon^2 . \text{Sin}\, \alpha^2 = 0{,}9945093$	$0{,}0054476$
	I
	$0{,}9945524$

$$\log CZ = \tfrac{1}{2} . 5{,}9976270 - 6 = 4{,}9988135 - 5.$$

$$CZ = 0{,}997270 . EC.$$

Eben so ist auch

$$CW = 0{,}9963949 . EC;\quad CU = 0{,}9954524 . EC.$$

$$ZCW = 47°\,,,\,38' - 49°\,,,\,37' = 8°\,,,\,0'\,,,\,37''.$$

und $$CWZ = \frac{180 - 8°\,,,\,0'\,,,\,37}{2} = 85°\,,,\,59'\,,,\,42;$$

also $$UWZ = 171°\,,,\,59'\,,,\,23''.$$

Auch ist $ZW = \sqrt{(CZ^2 + CW^2 + 2 . CZ . CW . \text{Cos}\, ZCW)}$.

log

log 2 = 0,3010300.	
log CZ = 4,9988128—5.	
log CW = 4,9984294—5.	CZ^2 = 0,99440784.
log Cos ZCW = 9,9957459—10.	CW^2 = 0,99281296.
4,2940181—4.	1,98722080.
Absolutzahl 1,9680.	1,9680.
	0,019220.

$$\log 0{,}01922 = \frac{4{,}2837534-6.}{4{,}1418767-5.}$$

$$ZW = 0{,}13863 . EC.$$

Letztlich ist in dem Viereck aWbR, wegen der rechten Winkel bey (a) und (b)

$$180 + UWZ + aRb = 360.$$

$$aRb = 180 - UWZ.$$

$$aRZ = \tfrac{1}{4} . URZ = \tfrac{1}{2}\, aRb.$$

Ferner ist in dem Dreyeck aRZ;

$$1 : RZ = \sin \tfrac{1}{4}\, URZ : \tfrac{1}{2} WZ.$$

$$RZ = \frac{WZ}{2 . \sin \frac{1}{4} URZ} = \frac{a . WZ}{2 . \sin \frac{1}{2} aRb}.$$

Nun ist aber $UWZ = 171°\,„\,59'\,„\,23''$; also $aRb = 8°\,„\,0'\,„\,37''$ und $aRZ = 4°\,„\,0'\,„\,18''$.

Nimmt man nun den Halbmesser des Aequators zu 6375740 Meter an, so ist

log a = 6,8045308.	log 2 = 0,3010300.
log ZW = 4,1418572—5.	log ARZ = 8,8441863—10.
5,9463880.	9,1452163—10.
	10,9463880—5.
	4,1452163—5.
	log RZ = 6,8011717.
	RZ = 6326700 Meter.

Der Halbmesser der Sphäre eines Landes, dessen südlichster Parallel 40° und der nördlichste 56 Grade hat, wäre sonach 6326700 Meter.

c. Für dieses Land wäre ferner der Krümmungshalbmesser für seine Mitte, oder wo sein mittlerer Parallel den Meridian durchschneidet, nach §. 2. V.

$$R = \frac{a.(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2.\mathrm{Sin}\,\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad \alpha = 48°,,0'.$$

$\log \varepsilon^2 =$	0,1234887-2	
$1.\mathrm{Sin}\,\alpha^2 =$	19,7421470-20	
	4,8656357-7.	
Absolutzahl	0,0073390	
	1	$\log a =$ 6,8045308
	0,9926610	$1.(1-\varepsilon^2) =$ 0,9941900-1
$\log(1-\varepsilon^2\,\mathrm{Sin}^2) =$	4,9968049-5	16,7987208-10
	3	6,9952073-7
	2 | 13,9904147-14	$\log R =$ 6,8035135
$1.(1-\varepsilon^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2)^{\frac{3}{2}} =$	6,9952073-7	$R =$ 6360800 Meter.

Dieser locale Krümmungshalbmesser weicht also von dem Halbmesser der Sphäre für das ganze Land um 6360800 — 6326700 oder 34100 Meter ab; es kommt jener diesem um so näher, je kleiner die Breitendifferenz des Landes ist.

Das Auftragen der Orte des Staats in seine Charte durch ihre sphärische Coordinaten.

VIII. Ist nach (I.) der Halbmesser der Sphäre berechnet, welche den sphärisch aufgenommenen Staat auf dem

dem Erdellipsoid streifet, so kann man denselben auf einer Kugel in verjüngtem Maaße auftragen, oder auf derselben ein ihm ähnliches Bild entwerfen, indem man die Bogenordinaten und Abscissen seiner Orte auf dieselbe gehörig aufträget, und nachgehends das Detail einzeichnet.

Diese Kugel wird nun so vielmal in ihrem Durchmesser kleiner als jene Sphäre, so oftmal die Einheit, nach welcher man jenes Bild entwerfen will, kleiner als der landübliche Fuß oder überhaupt das Maaß ist, nach welchem man den Staat selbst aufgenommen hat.

Für die K. Baierische Catastralcharte geben 5000 Fuße gerade einen Fuß; der Chartenfuß ist daher $\frac{1}{5000}$ eines landüblichen Fußes.

Auch wurde der Halbmesser der Sphäre, welcher die Monarchie streifet, für den nördlichen Thurm der Lieb-Frauen Kirche zu München für eine Polhöhe von 48°„ 8′„ 20 Secunden, zu 21809110 Baier. Fußen berechnet (l. g.); es wäre deswegen der Halbmesser der Kugel, auf welcher nach diesem Maaßstab die Monarchie verjüngt aufgetragen werden könnte, $\frac{21809110}{5000} = 4361{,}822$ Fuße $= r$; und $\log r = 3{,}6396680$.

Auch ist auf dieser Kugel ein Grad

$= \frac{1}{180} \pi r = \frac{380641}{5000} = 72{,}1282$ Fuße. (I. g.)

Sind nun auf dieser Kugel der Aequator und der Meridian senkrecht auf einander gezogen, welcher für den mittlern des Landes gilt, und in ihre Grade gehörig eingetheilt, so kommt es zuvörderst darauf an, den Ort A auf der Kugel zu bestimmen, von welchem aus die Bogencoordinaten genommen wurden.

Da nun der Halbmesser der Sphäre nach (I.) in die Richtung der Schwerlinie des Ortes A selbst fällt, so

trägt

trägt man diesen Ort auf den Meridian der Kugel nach seiner geogr. Breite selbst auf.

Will man ferner den Ort B in Fig. (44.) auf die Kugel tragen, so trägt man auf dem Meridian PAE aus A seine Bogenabscisse AH, legt nun auf dem Aequator in dem Punct (g), welcher 90 Grade von dem Durchschnittspunct E abstehet, eine gerade biegsame Schiene dermaßen an, daß sie den Punct G und H genau schneidet, und ziehet an derselben den Bogen HBG, auf welchen nun die berechnete Bogenordinade des Ortes B aufgetragen wird.

Leget man die Schiene in dem Pol P der Kugel und in dem vorhin bestimmten Punct B auf derselben an, so schneidet sie auf dem Aequator die Längendifferenz FE der Orte A und B selbst ab.

Theilet man den Quadranten EAP in 9 gleiche Theile, und ziehet durch die Theilungspuncte und durch den Pol G auf dem Aequator mit der Schiene Linien auf die Kugel, so theilet sich dadurch dieselbe in Segmente von 10 zu 10 Graden, gerade so, als wenn man den Quadranten EG des Aequators in 9 Theile theilet, und durch die Theilungspuncte nach dem Pole P desselben, mit der Schiene Linien auf die Kugel ziehet. Diese Bogen sind daher immer größte Kreise der Kugel.

Ziehet man auf das Papier eine gerade Linie, welche dem Bogen AH gleich ist, und verbindet mit derselben einen Perpendikel, welcher dem Bogen HB gleichet, leget diesen Winkelhacken dermaßen auf die Kugel, daß seine Spitze in H trift, so leget sich sein Perpendikel nach der Richtung der Tangente des Bogens HB auf die Kugel.

Man träget daher die kurzen sphärischen Coordinaten des Staates auf sein Chartennetz eben so wie die seines geradlinichten Chartennetzes auf.

Wenn man daher aus dem Punct A und seinem Meridian den Ort B des Staates durch seine sphärische Coordinaten auftragen will, so ziehet man eine gerade Linie für den mittlern Meridian des Staates, wählet auf derselben den Punct A, und trägt von A nach H das Bogenmaaß seiner Abscisse in Fußen ausgedrückt auf; setzet in H einen Bogen senkrecht auf AH, mit dem Halbmesser der Sphäre, und trägt auf dieselbe die in Fußen ausgedrückte Bogenordinate des Ortes B, so bestimmt sich dadurch der Ort B auf einer der Sectionen der Charte. §. 12. IV.

Eben so werden auch alle übrige Orte durch ihre sphärischen Coordinaten aus dem Fußpunct A aufgetragen.

Nach diesem Verfahren constituiret sich daher die Charte aus Segmenten, welche auf ihrem mittlern Meridian eben so senkrecht stehen, und in dem Aequator 90 Grade von diesem zusammen laufen; wie z. E. die Kugelsegmente auf dem Aequator senkrecht sind, und im Pol zusammen laufen: sollte das Segment nach der Breitendifferenz des Staates zu breit werden, so wählet man für seine Charte die Conoidalprojection §. 12. IX.; und trägt nun die Bogenordinaten auf den ihnen für den Kegel entsprechenden Kreisen selbst auf.

Combination der berechneten Längen und Breiten der Orte, mit örtlichen Beobachtungen.

IX. Ist der Geograph mit astronomischen Werkzeugen versehen, mit welchen er die Polhöhen der Orte, die Zeit ihres wahren Mittags, und die Längendifferenzen aufs

genaue-

genaueste messen und bestimmen kann, so kann er die Resultate seiner Rechnung für die geogr. Länge und Breite gegebener Orte, an Ort und Stelle selbst mit wirklichen Beobachtungen zusammenstellen.

Diese Zusammenstellung würde eine scharfe Controle der sphärischen Messung selbst abgeben, wenn der Geograph seine astronomischen Beobachtungen mit einer Zuverlässigkeit anstellen könnte, die nichts mehr zu wünschen übrig ließe.

Statt dessen aber lehret die Erfahrung, daß der geübteste Beobachter, wenn er auch mit einem vortreflichen Höhenkreis von Reichenbach versehen ist, und seine Höhenwinkel durch mehrere hundertmalige Repetition nimmt, nichts destoweniger in Bestimmung der Polhöhe eines Orts kaum bis auf eine halbe Bogensecunde sicher seyn könne.

Diese betragen für den Halbmesser der osculirenden Sphäre von 6793300 Meter §. 9. VI. im Bogen $\frac{1}{2}$. 30,996 oder beinahe 15 $\frac{1}{2}$ Meter in dem Parallel von 40 Graden.

Statt dessen ist bey der sphärischen Triangularmessung mit einem Reichenbachischen Geodoliten, welcher die Winkel bis auf 2 Secunden sicher anspricht, eine Differenz von ein bis zwey Meter schon sehr bedeutend, wenn die nemliche Distanz von zwey Seiten her durch eine Anreihung von mehrern großen Dreyecken bestimmt wird.

Bey der K. Baierischen geogr. Messung wurde die Distanz von Hohenstein nach der Wilzburg von beiläufig 9 $\frac{1}{2}$ geogr. Meilen durch die Münchner und Nürnberger Basis bestimmt, und es zeigte sich dabey nur eine Differenz von 2 bis 3 Baierischen Fußen. Eben so geringe Differenzen fanden sich auf sehr großen Distanzen, auch bey mehrern geogr. Messungen, welche in Frankreich

reich und Niederdeutschland angestellt wurden, so daß man immer annehmen kann, daß die trigonometrische Breitenbestimmung der Orte, für eine passende Ellipticität unserer Erde, immer 10mal zuverlässiger als die astronomische seye.

Eben so lehret die Erfahrung, daß die Längenbestimmungen solcher Orte, die als astronomische Observatorien rücksichtlich der Apparate alles gewähren, was zu wünschen ist, höchstens auf $\frac{1}{4}$ Zeitsecunde sicher seyn könne, die im Bogen $\frac{15}{4}$ oder $3\frac{3}{4}$ Secunden, und im Längenmaaß für den Parallel von 45 Graden 82,19 Meter betragen.

Die astronomische Längenbestimmung, wäre sonach wieder 8 bis 10mal unsicherer als Breitenbestimmung des nemlichen Orts.

Eben dieß gilt auch für die Längenbestimmung durch Chronometer und Pulversignale IV. V.; weil diese auch keine größere Zuverlässigkeit als die astronomische gewähren.

Wenn nun diesemnach astronomische Beobachtungen der Polhöhen und Längen der Orte, beiweitem nicht genügend sind, die trigonometrische Bestimmungen derselben zu controliren, so kommen noch andere Umstände hinzu, welche diese Controle noch mehr verwerflich machen.

Diese aber finden sich in der Abweichung des Loths durch die Anziehung benachbarter Berge, und selbst in der localen Schwere, die von der allgemeinen nach Umständen abweichet. §. 1. II.

Wenn daher die astron. Bestimmung eines Orts mit seiner trigonometrischen genau zusammenpaßt, so ist dieß mehr dem Zufall, als eigentlich der Virtuosität des Astronomen und seiner Instrumente zuzuschreiben.

Will der Geograph die berechnete Längen seiner Orte, durch die Vergleichung ihrer berechneten Azymuthe mit den wirklichen observirten Azymuthen (III.) zusammenstellen, so tritt hier abermals der Umstand ein, daß da bey der Messung des Azymuths die Zeit mit in Betracht kommt, ein Fehler in derselben sich nach dem Stundenwinkel 15mal vergrößert; daß mithin auch solche Beobachtungen keine scharfe Controle der trigonometrischen Bestimmung der Länge eines solchen Orts abgeben könne; wenn man auch annehmen wollte, daß die Polhöhe desselben ganz ohne allen Fehler gemessen worden wäre.

Bey so bewandten Umständen kann daher der Geograph seine trigonometrische Resultate durch astronomische Beobachtungen nur in soweit controliren, als er durch dieselbe Fehler entdecken mag, die nur in einem fehlerhaften Calcul oder in Rechnungsfehlern ihren Grund haben mögen: er wird wenigstens attend, wo die Differenzen gar zu bedeutend ausfallen sollten.

Verification der sphärischen Aufnahme eines Staates.

X. Kann nach (IX.) der Geograph die Bestimmung der Orte des Staates nach der sphärischen Trigonometrie, durch astronomische Beobachtungen nicht wohl erwähren, so muß er andere Wege einschlagen, sich von der Richtigkeit seiner Operationen zu überzeugen: er verfähret dabey um so zweckmäßiger, wenn er diese Mittel von Zeit zu Zeit anwendet, ehe er die ganze Messung beendiget hat, damit er in Zeiten die nöthigen Vorkehrungen treffen kann, ehe die unvermeidlichen Fehler sich zu sehr anhäufen.

Diese Mittel gründen sich vorerst auf die sphärische Polygonal-Probe ganzer bereits aufgenommener Gaue des Staates, §. 15. II.; so wie auf die Berechnung jener Seiten der Dreyecke, die zweien Gauen gemeinschaftlich sind. §. 15. IV.

Außerdem aber erwähret der Geograph seine Operationen vorzüglich durch die Alignements, wo sich für solche Gelegenheit findet. §. 11. I. 4.

Findet sich z. E. in Fig. (42.) bey M ein schickliches Terrain für die Messung einer kurzen Linie, so kann der Geograph die Verticalebene durch die Orte D„C nach (t) verlängern, wo sie in die Linie BM einschneidet.

Er berechnet deswegen den Winkel MCt als die Ergänzung seiner in C gemessenen Winkel zu 180 Graden, mißt in (t) den Winkel CtM, und berechnet in dem Dreyeck CtM die kurze Seite Mt. Weicht nun die Rechnung von ihrer Messung bedeutend ab, so veranlasset die Differenz den Geographen für eine Interpolation der Dreyecke, §. 15. IV., bis sie dadurch gänzlich verschwindend gemacht wird.

Je mehr daher der Geograph solche Alignements profitiren kann, um so besser kann er seine Operationen von Zeit zu Zeit controliren; er wird des Ganges derselben noch um so sicherer, je mehr eine durch zwey oder drey Orte verlängerte Diagonale §. 11. II. andere überschneidet, und an je mehrern sie außerdem so nahe vorbey gehet, daß man ihre Abweichung füglich messen kann.

§. 17.

§. 17.

Aufnahme der Steppen.

Unter Steppen verstehe ich hier jene große Ländereien, welche in Asien unter diesem Namen bekannt sind; wie z. E. ein großer Theil von Siberien, und die Lande am Aral, u. dergl.

Wo man nun so große Länder wegen des Kostenaufwandes nicht trianguliren, oder sie sonst nach §. 13. I. II. polygonometrisch aufnehmen kann, begnüget man sich, an den vorzüglichsten Orten derselben ihre geographische Breiten, und ihre Längen-Differenzen nach (§. 16.) zu bestimmen.

Für solche Länder kann man daher ihre Orte und sonst merkwürdige Stellen nicht wie in §. 15. V. durch ihre gemessene Bogen-Coordinaten in ihre Charte einzeichnen: man muß sie statt dessen nach ihren gemessenen Längen und Breiten in die Charte zeichnen; und diese deswegen vorerst graduiren.

Man entwirft nemlich nach diesen Beobachtungen für sie das graduirte Netz ihrer Charte, zeichnet in dieses jene Orte nach ihren observirten Längen und Breiten ein, und entwirft das zwischen ihnen liegende Detail blos situationsmäßig.

Vorläufiger Ueberschlag wegen der Blätter der Charte.

I. Soll nun eine solche Charte aus mehrern Blättern zusammengesetzt werden, so muß der Geograph vorerst die Zahl der Blätter vorläufig bestimmen, indem er dabey folgendermaßen zu Werke gehet.

Es habe der Geograph nach seinen Beobachtungen gefunden, daß sich dieselbe im Norden bis zum 53sten, in Süden bis zum 43sten Breitengrade, von Osten nach Westen aber auf 30 Längengrade der Erde sich erstrecke.

Sonach wäre also ihr mittlerer Parallel der 48ste, und ihre halbe Längen-Differenz 15 Grade.

Nun wähle er ferner vorläufig den Maaßstab der Charte dergestalt, daß eine geographische Meile auf derselben $\frac{1}{2}$ Decimalzoll des landüblichen Fußes oder $\frac{5}{100}$ desselben messen; so geben 100 Meilen nach demselben gerade 5 Fuße, oder die Meile $\frac{1}{20}$ Fuß.

Nimmt er ferner unsere Erde als eine Kugel vom Halbmesser 860 an, so würde seine Charte einer Kugel von $\frac{860}{20}$ oder 43 Fußen Halbmessen zupassen müssen; da nun der Halbmesser des Kegels, welcher den 48sten Grad der Kugel berühret, $0{,}9.43 = 38{,}7$ Fuße ist, so ist deswegen der Halbmesser des Kreises, der mit dem Parallel 48 congruirt, auch 38,7 landübliche Fuße, und der Centerwinkel des Kegels $\frac{430}{387}.30 = 33°\,20'$.

Ferner mißt auf diesen Parallel ein Längengrad 10,607 Meilen, also die 30 Grade im Bogen 318,2 Meilen oder $\frac{3180}{20} = 16$ Fußen; und die Breiten-Differenz $15.10 = 150$ Meilen, oder auf der Charte $\frac{150}{20} = 7{,}5$ Fuße; mithin ein Breitengrad in den andern 0,75 Fuße.

Sonach ist der Halbmesser des Parallels von 53 Graden $38{,}7 - 5 . 0{,}75 = 34{,}95$ Fuße; und der Sinusversus des Centerwinkels für die Chorde von 16 Fußen beinahe $\frac{8^2}{2.35} = 0{,}901$. Fuße; mithin die Höhe des Netzes der Charte $10.15 + 0{,}901 = 159$ Meilen oder $\frac{1590}{20} = 7{,}95$. Fuße.

Nun

Nun könne aber der Geograph für seine Charte nur solches Papier wählen, wovon ein Bogen in seiner langen und kurzen Seite höchstens eine Vierung von $2\frac{2}{3}$ und 2 Fußen wegen des Spatiums am Rande erleidet.

Nimmt er daher die lange Seite seiner Bogen bey der Charte aufwärts, so setzet sich die Charte der Länge nach aus $\frac{16}{2}$ oder 8 Blättern und in der Höhe aus $\frac{7,95}{2\frac{2}{3}}$ oder 3 Blättern zusammen; die Charte würde aus 8.3 oder 24 Blättern bestehen; und es würde insbesondere ringsum noch einiger Raum für das Nebenland verbleiben.

Ziehung der Breiten-Kreise durch mehrere Charten-Blätter.

II. Es sey nun in Fig. 46. ABCD der Conflict sämmtlicher Blätter der Charte.

Nimmt man auf derselben ihre mittlere Linie EF für den mittlern Meridian des Landes an, und verlängert denselben beliebig, so fällt in diese Verlängerung der Mittelpunct aller Parallelkreise der Charte selbst, in welcher nun zuvörderst die Puncte für die zu ziehende Parallelkreise aufgezeichnet werden müssen.

Da nun diese für die vollen 10 Grade Breiten-Differenz 7,5 landübliche Fuße messen, die Charte aber in ihren 3 Blättern aufwärts $3.2\frac{2}{3}$ oder 8 Fuße mißt, so kann man die $8-7\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{2}$ Fuß Differenz halbiren und den $\frac{1}{4}$ Fuß von E nach (G) auf dem Blatt I. tragen; wornach die Parallele von 43 Graden durch (G) gezogen wird.

a. Nimmt der Geograph ferner $\frac{3}{4}$ Fuß von seinem landüblichen Fuße ab, und träget sie von G nach H und

durch

durch zweimaliges Umschlagen nach K, so ergeben sich dadurch die Puncte für 44 „ 45 „ 46 Grade, und es verbleibet noch der Theil KL $= 2\frac{2}{3} - (\frac{1}{4} + 3.\frac{3}{4}) = \frac{1}{6}$ Fuß auf dem Blatt I. übrig.

Träget man ferner auf dem Blatt IX. die $\frac{3}{4} - \frac{1}{6}$ oder $\frac{7}{12}$ Fuße von L aus auf, so ergiebt sich der Punct für den 47sten Grad; hiezu $\frac{3}{4}$ Fuß angesetzt, giebt den mittlern Parallel des Landes für 48 Grade; diese einmal umgeschlagen, giebt 49, und noch einmal umgeschlagen, giebt den Parallel für 50 Grade, u. s. w. bis diese Eintheilung in N mit dem 53sten Grade endet.

Ist diese Eintheilung für die Puncte, durch welche die Parallelkreise gezogen werden sollen, aufs genaueste vollführet, so kommt nun alles darauf an, diese selbst aufs sicherste auf den Blättern der Charte zu ziehen.

Rücksichtlich dessen berechnet nun der Geograph vorerst für jeden Parallel den Sinusversus seines Bogens, um durch ihn Anhaltpuncte auf der Charte zu finden, folgendermaßen.

Es sey der Halbmesser des Bogens $= \varrho$; die halbe Chorde $= \eta$; und der Quersinus $= x$; so ist nach der Gleichung für den Kreis

$$\eta^2 = 2\varrho x - x^2; \quad x = \varrho - \sqrt{(\varrho^2 - \eta^2)}.$$

Für den Parallel OGQ von 43 Graden ist sein Halbmesser $38{,}70 + 3.\frac{3}{4} = 42{,}45$ Fuße $= \varrho$; und die Ordinate ES $= 2$ Fuße; also der Quersinus $= 42{,}450 - 42{,}403 = 0{,}047$ Fuße. Diese trägt man nun mit dem EG $= \frac{1}{4}$ Fuß auf der Quadratseite der Blätter (I.„V.) von S nach R, und von U nach W; und ziehet nun mit dem Druckcirkel den Bogen WGR; und erhält diesen in seiner Stellung unverrückt.

Für

Für die Blätter II„VI. ist die Ordinate $n = 4$ Fuße; also $x = 0{,}189$. Man trägt daher $0{,}25 + 0{,}189$ oder $0{,}439$ Fuße von U nach T, leget den Druckcirkel in R und T an, und ziehet so auf den Blatt II. den Bogen RT.

Für das Blatt III. VII. ist $n = 6$; und für das Blatt IV„VIII. $n = 8$; mithin $QB = AO = 1{,}011$. Fuße.

Eben so wird auch jeder andere Parallelkreis theilweise mit dem Druckcirkel durch sämmtliche Blätter der Charte gerissen: man kann auch, wenn man noch genauer verfahren will, für Zwischenpuncte wie z. E. für U auf dem II. Blatt den Sinus voraus berechnen; und so nach den Puncten R„U„T den Druckcirkel stellen.

Ziehung der Meridiane auf der Charte.

III. Sind nach (II.) die Parallelkreise auf sämmtlichen Blättern der Charte gezogen, so kann man die Intervalle, welche sie auf den Quadratseiten AC„DB abschneiden, in kleinere Theile eintheilen, und es kommt nun noch darauf an, auch die Bogenmeridiane auf die Charte zu ziehen, folgendermaßen.

Ist der Halbmesser der Kugel, auf welche die Charte zupaßt, $= r$; und die geogr. Breite eines Parallelkreises $= \alpha$, so ist der Halbmesser des Parallels selbst $r \cdot \cos \alpha$; sein Umfang $2 \pi r \cdot \cos \alpha$; mithin für (n) Grade der Bogen $\frac{n}{180} \pi r \cos \alpha$.

Für den 43 Parallel oder für OGQ ist $\alpha = 43°$; $r = 43$ Fuße der Halbmesser der Kugel; und

log

$\log \pi = 0{,}4971498.$
$\log r = 1{,}6334685.$
$\text{l. Cos } \alpha = 9{,}8641275 - 10.$

$11{,}9947458 - 10.$

$\text{l. } 180 = 2{,}2552725.$

$4{,}7394733 - 5.$

ein Grad = 0,54888. Fuße.

Nimmt man daher auf einmal 3 Grade mit 1,64664 Fußen auf dem Maaßstab ab, und träget sie auf dem Parallel OGQ aus G zur Rechten und Linken auf den Bogen, so kann man jeden solchen Bogen in 3 gleiche Theile eintheilen; man erhält dadurch die Grade um so genauer, weil der bey Abnehmung der 1,646 Fuße auf dem Maaßstabe unvermeidliche Fehler §. 11. sich dadurch in 3 Theile theilet.

Sind nun diese 3 Grade auf den Blättern I„ V aufgetragen, so kann man sie weiters auch auf die Blätter II„ III„ IV„ VI„ VII„ VIII auf dem gezogenen Parallel OGQ transferiren u. s. w.

Auf diese Art träget man auf jeden übrigen Parallel die für ihn berechnete Grade auf, und erhält sonach auf ihnen gleichnamige Theilungspuncte a„ b„ c„ d; durch welche man nachgehends eine continuirliche Curve für die Meridiane der Charte mit dem Druckcirkel ziehen kann.

Uebrigens kann man die Längengrade, wo sie in die Seiten AB„ CD der Vierung der Charte einschneiden, noch weiters eintheilen.

Das Eintragen der Orte des Staates in seine graduirte Charte.

IV. Wenn aber auch die Breitengrade und Längengrade auf den Quadratseiten der Charte in so kleine Theile

abgetheilt werden, als ihre Grösse gestattet, so genüget dessen ohngeachtet diese Theilung nicht, um die Orte des Staates nach ihrer geogr. Länge und Breite nach derselben in seine graduirte Charte einzutragen; weil eine solche Eintheilung doch niemalen so weit gehen kann, daß man einzelne Secunden auf ihr sollte abnehmen können.

Es bleibt daher für diesen Behuf nur die Berechnung der Stelle übrig, an welche der Ort nach seiner Lage auf der Erde, auch auf die Charte zu liegen kommen soll; welche folgendermaßen am füglichsten geführt wird.

Es sey z. E. ein Ort in die Charte einzutragen, dessen geogr. Breite 48°„ 36′„ 40″ und östliche Längendifferenz von dem mittlern Meridian FE zu 9°„ 13′„ 45″ nach §. 16. befunden wurde.

Nun mißt aber ein Breitengrad von 3600 Secunden auf der Charte nach II. 0,75 Fuße; es ist daher

$$3600 : 2200 = 0{,}75 : 0{,}458.$$

Auf der Charte fällt ferner der 49 Breitengrad und 9 Längengrad in die Vierung gklm des XI. Blatts. Man nimmt daher auf dem landüblichen Fuße, nach welchem die Charte graduirt wurde, die 0,458 mit dem Cirkel ab, und schätzet nach dem Augenmaaß auf dem Bogen Kl von ein Grad die 13¾ Minuten auf n, und träget die Cirkelöffnung von (n) nach (o) vorläufig, indem man in o einen kleinen Bogen ziehet.

Nun mißt man mit dem Cirkel durch (o) die Größe pq = 0,496 des Längengrades, und proportioniret nach derselben die 13¾ Minuten, wie vorhin für die Breite; nemlich

$$3600 : 0{,}496 = 1025 : 0{,}113;$$

nimmt nun die 0,113 mit dem Cirkel ab, und schneidet aus p den vorhin aus (n) gezogenen Bogen, so ist der

Durch-

Durchschnittspunct (o) beider Bogen, die Stelle, wo der Ort in der Charte liegen muß.

Eben so kann man auch rückwärts auf einer Charte, die geogr. Breite und Länge eines Orts bestimmen; die Aestimation derselben nach den Graden der Charte, ist immer sehr unzuverlässig.

Uebrigens ergiebt sich der Maaßstab für diese Charte unmittelbar aus ihren Breitengraden. Denn da jeder derselben auf 15 geogr. Meilen gerade $\frac{3}{4}$ Fuße mißt, so mißt eine Meile $\frac{3}{4.15} = \frac{1}{20}$ Fuß oder $\frac{1}{2}$ Decimalzoll des landüblichen Fußes, nach welchem die Charte gezeichnet wurde.

Graduirung der Charte eines Staats nach der Größe und den Format ihrer Blätter.

V. In allen den bisher betrachteten Fällen wurde der Maaßstab der Charte freiwillig angenommen, und nach dieser Annahme die Größe der Charte berechnet (I.).

Statt dessen aber nehme ich nun an, man wolle auf einen Bogen, dessen lange und kurze Seite eine Vierung von $2\frac{1}{2}$ und 2 Fußen zulässet, die Charte eines Staates zeichnen, dessen nördlichste Breite 48 und südlichste 43 Grade, und Längendifferenz 20 Grade ist; auch soll unten für das Nebenland ein Raum von $\frac{1}{10}$ Fuß verbleiben.

Für diesen Staat ist also ein Breitengrad in den andern $\frac{1,9}{5} = 0,38$ Fuß, $= c$.

Denke ich mir nun eine Kugel von dem Halbmesser (ϱ), auf welche die Charte zupassen solle, so hat diese Kugel 360 solcher Grade, ihr Umfang ist daher

$$2\pi\varrho = 360.c;\ \varrho = \frac{180.c}{\pi}.$$

Für

Für diese Charte ist also

$$\log c = 1{,}5797836-2.$$
$$\log 180 = 2{,}2552725.$$
$$3{,}8350561-2.$$
$$\log \pi = 0{,}4971498.$$
$$\log \varrho = 1{,}3379063.$$
$$\varrho = 21{,}772. \text{ Fuße.}$$

Die Kugel, welcher die Charte zupasset, müßte also einen Halbmesser von 21,772 Fußen haben.

Denket man sich ferner die Charte als ein Stück eines Kegels, der senkrecht auf ihrer Kugel sitzt, und sie in dem mittlern Parallel des Staates, welchen die Charte vorstellet, berühret, so congruirt mit diesem Parallel auf dem Kegel der Kreis von dem Halbmesser

$$\varrho . \text{Cotang.} \tfrac{1}{2} . (48+43) = \varrho;$$

oder der mittlere Halbmesser des Kegels dieser Charte ist, dem Halbmesser der Kugel gleich, welcher sie zupasset.

Es ist ferner auf dem Kegel der Halbmesser des mit dem Parallel von 48 congruirenden Kreises,

$$27{,}772 - 3 . 0{,}38 = 26{,}632;$$

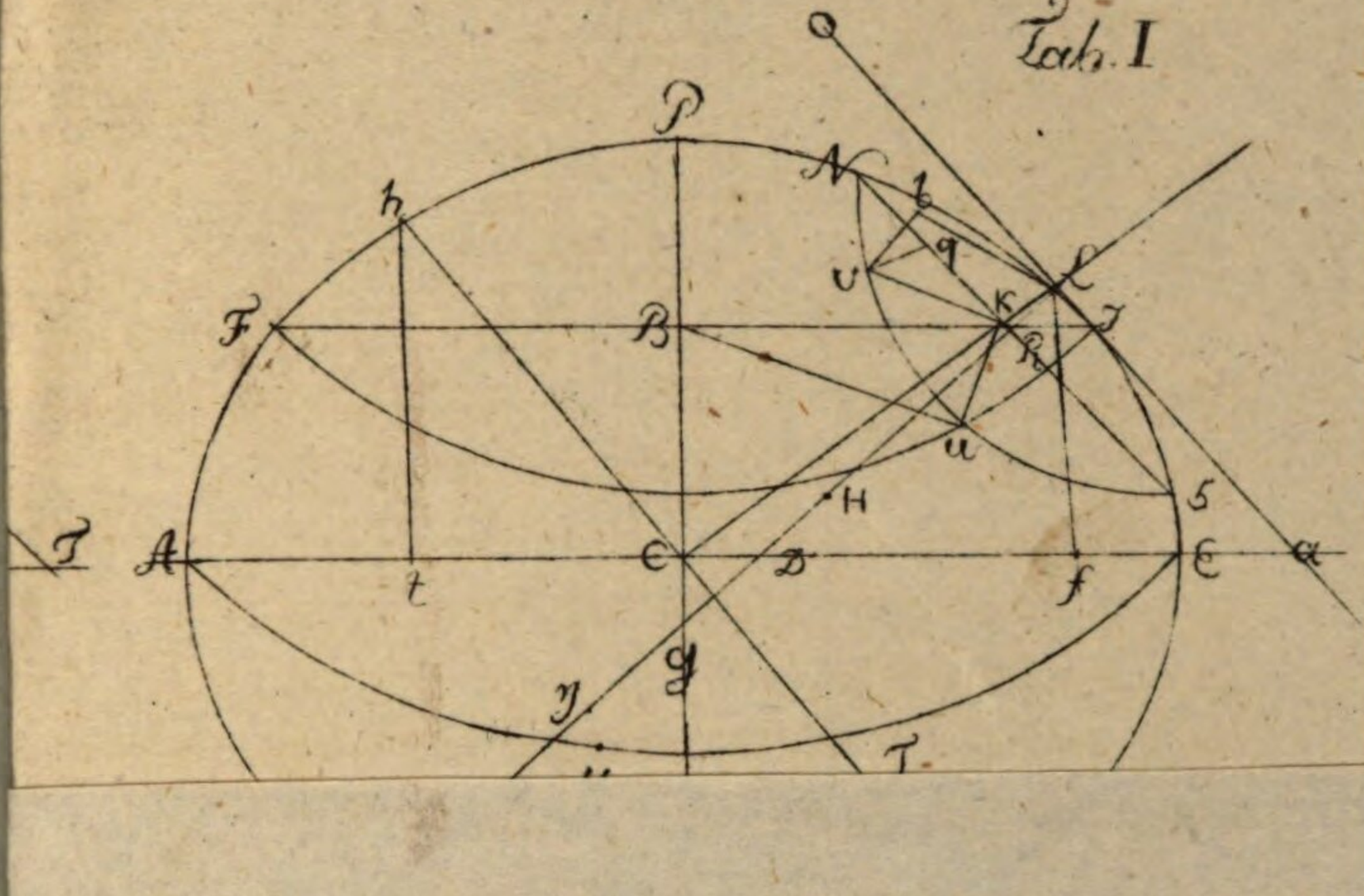
und für 42 Grade der Halbmesser 28,912 Fuße.

Letztlich ist die Größe eines Parallelgrades von der geographischen Breite $= \alpha$ gleich $\frac{\pi . \varrho . \text{Cos}\,\alpha}{180.}$; wornach also die Längengrade, und die sie bestimmende Meridiane auf die Charte getragen werden können.

Die Kugelsegmente werde ich in der zweiten Abtheilung erwägen.

Bayerische Staatsbibliothek München

Tab. I



Tab. II.

3.

Q

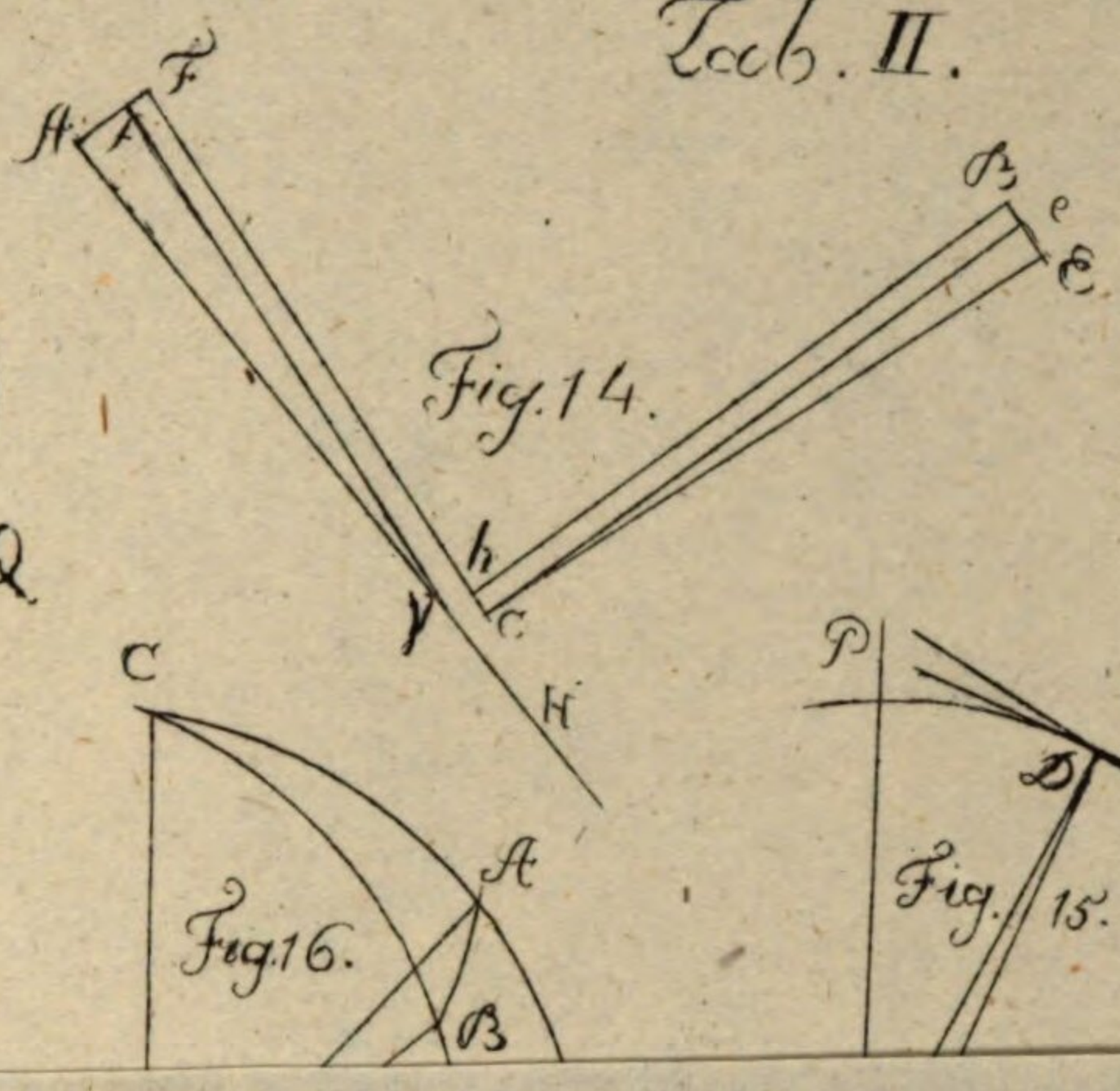


Fig. 14.

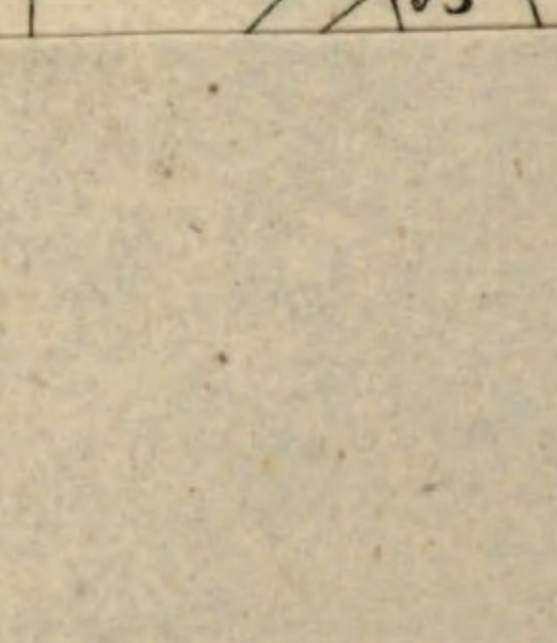


Fig. 16.

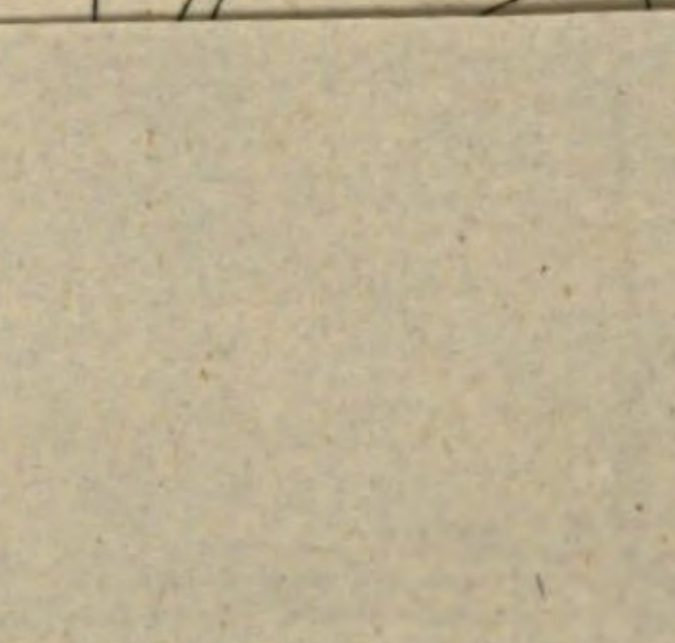
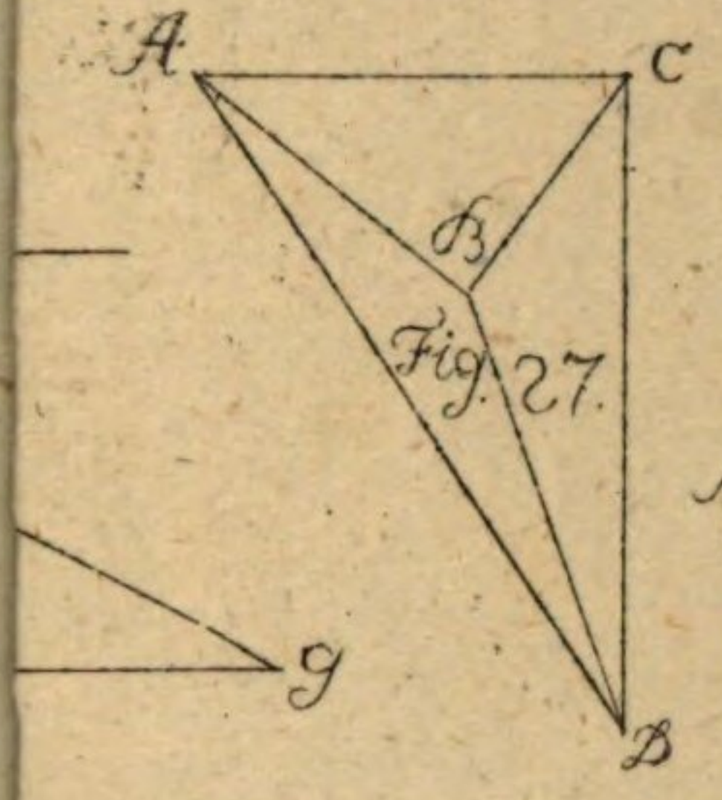
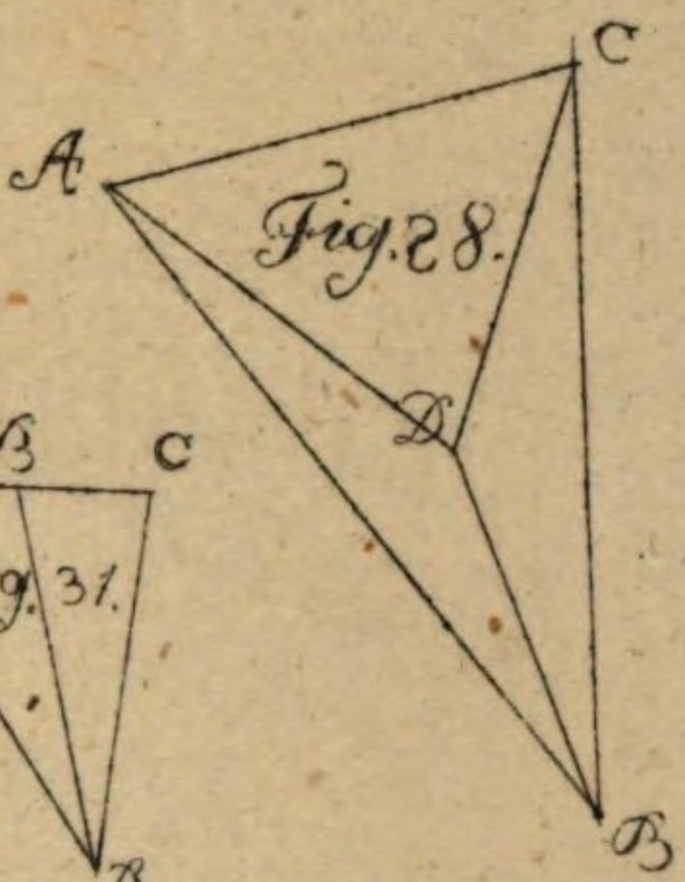
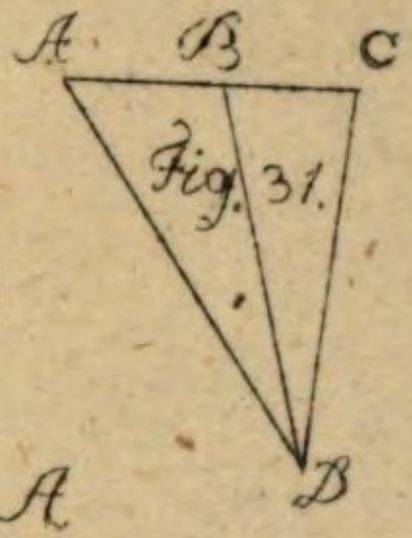


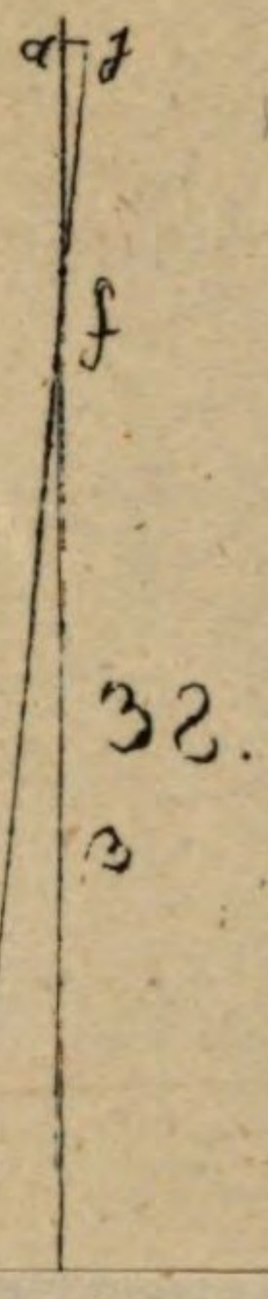
Fig. 15.

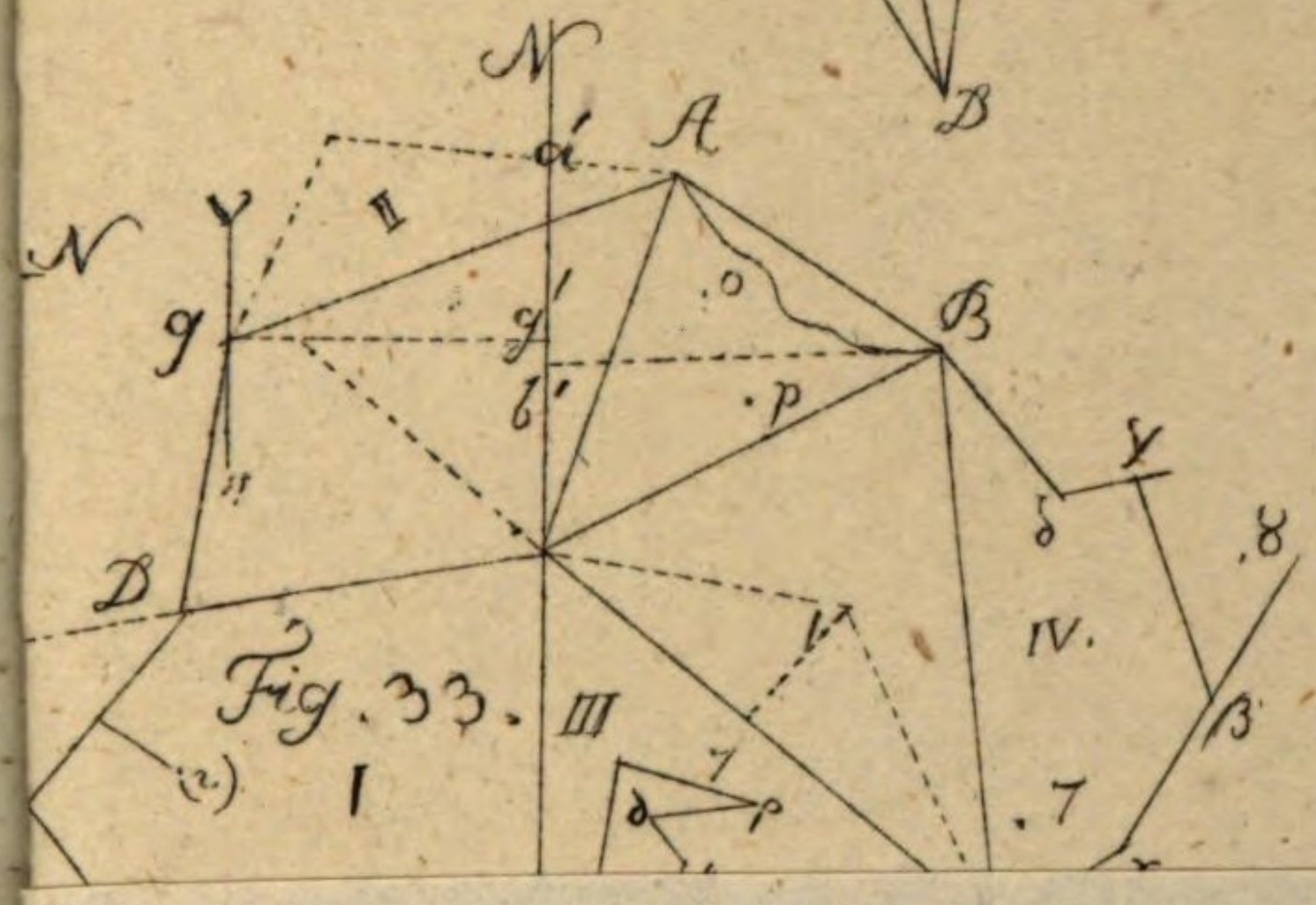
Tab. III.


A
C
B
Fig. 27.
g
B


A
C
Fig. 28.
D
B


A
B
C
Fig. 31.
B


d
f
f
Fig. 32.
6
3


N
d
A
N
V
II
g
g'
o
B
b'
p
V
δ
8
D
IV.
Fig. 33.
III
(2)
I
7
7
B

Tab. IV.

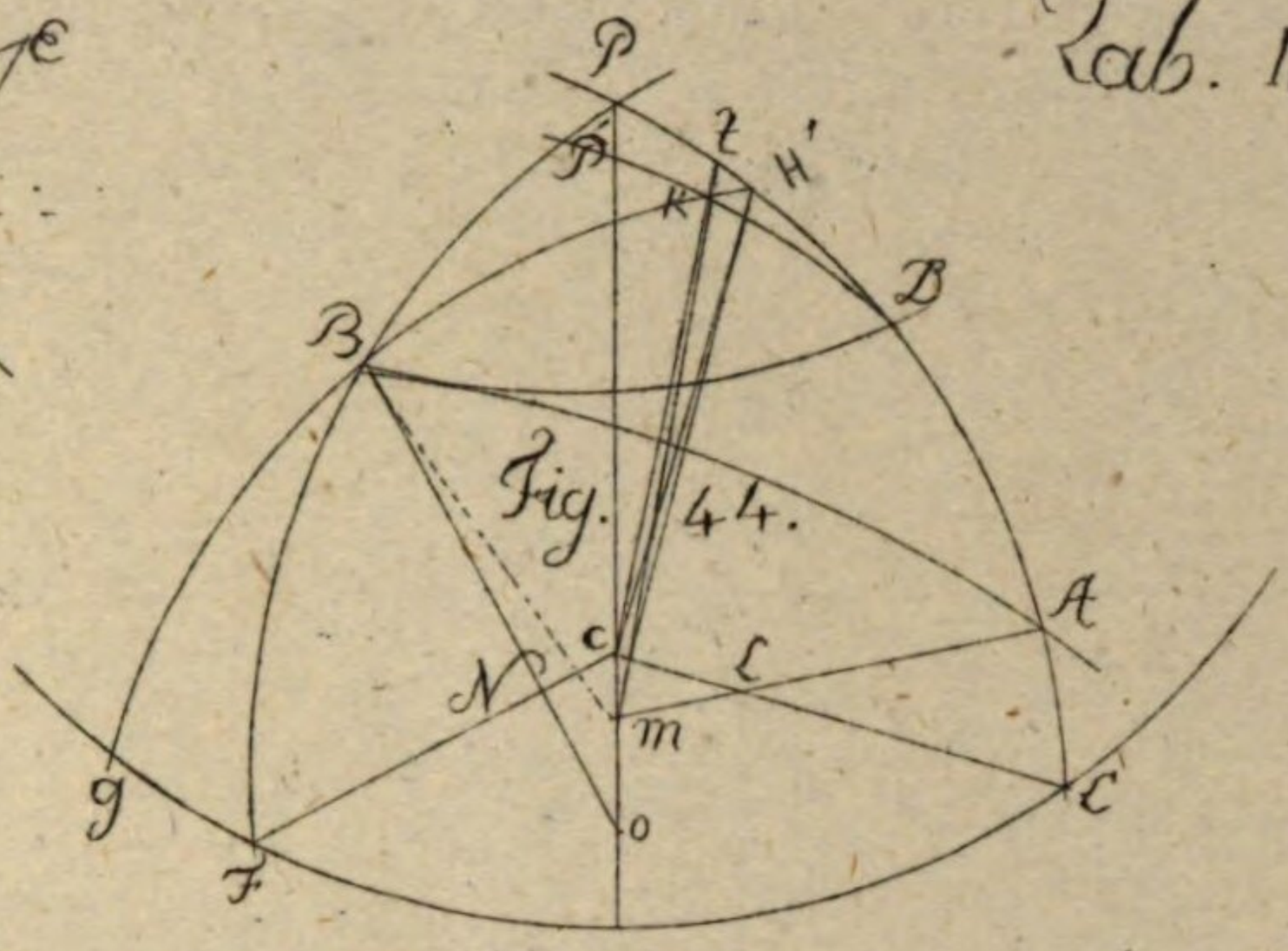


Fig. 44.

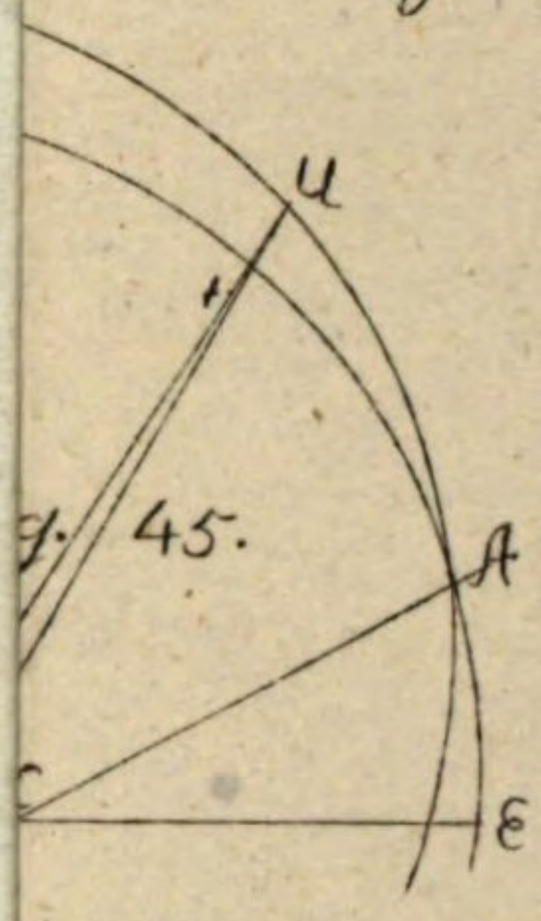


Fig. 45.

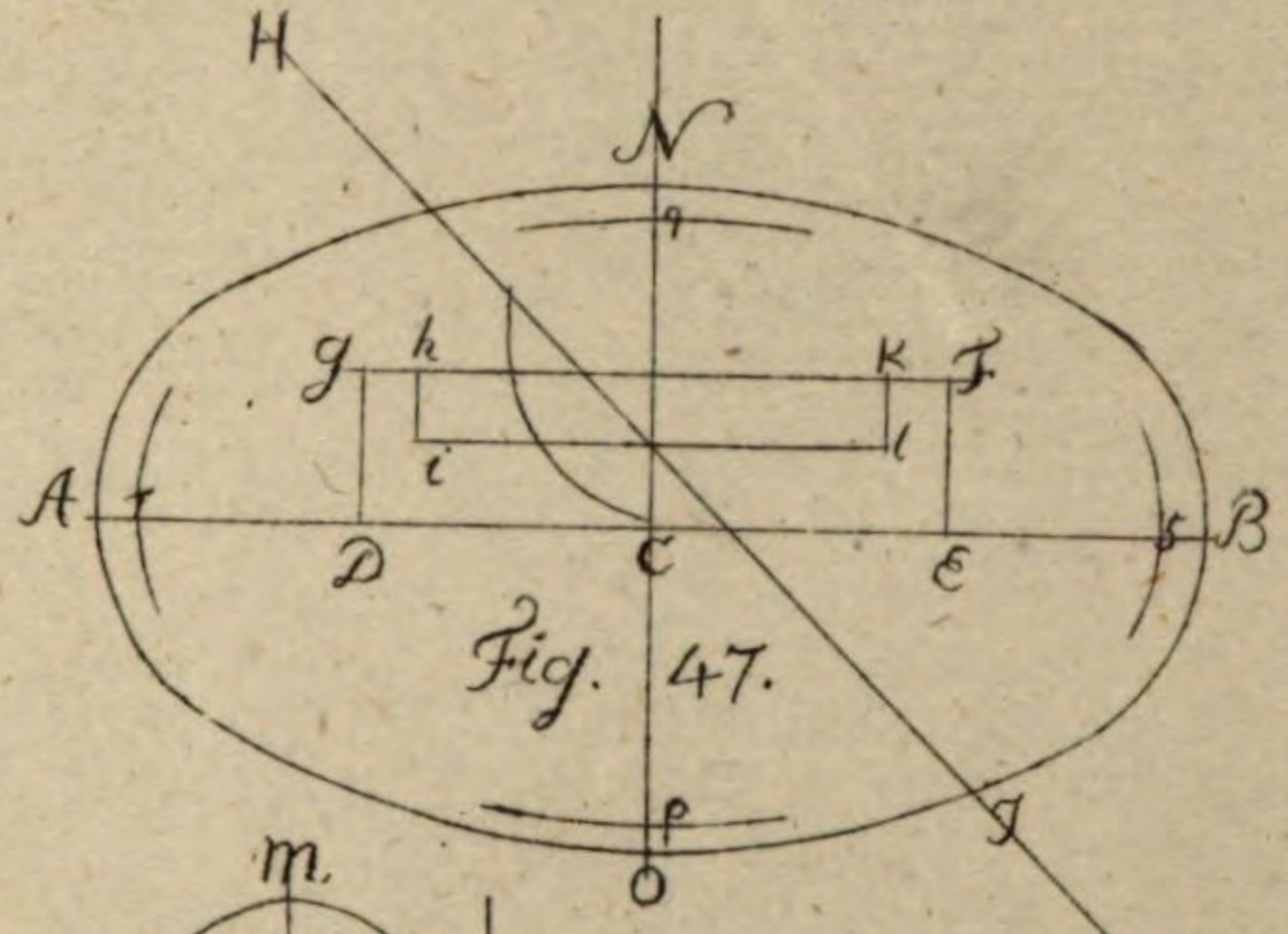
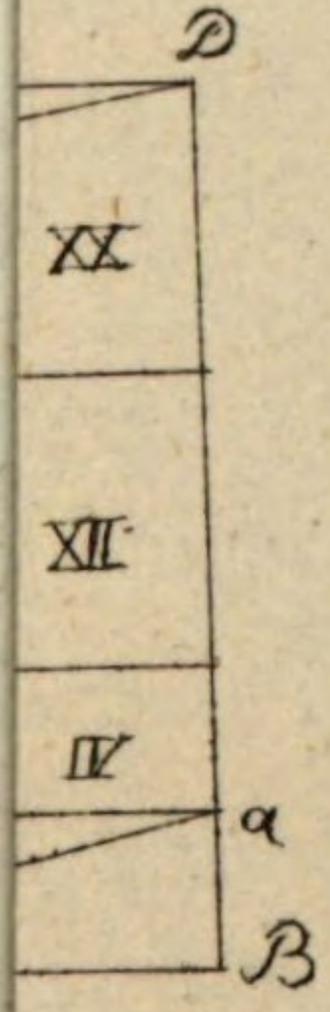


Fig. 47.



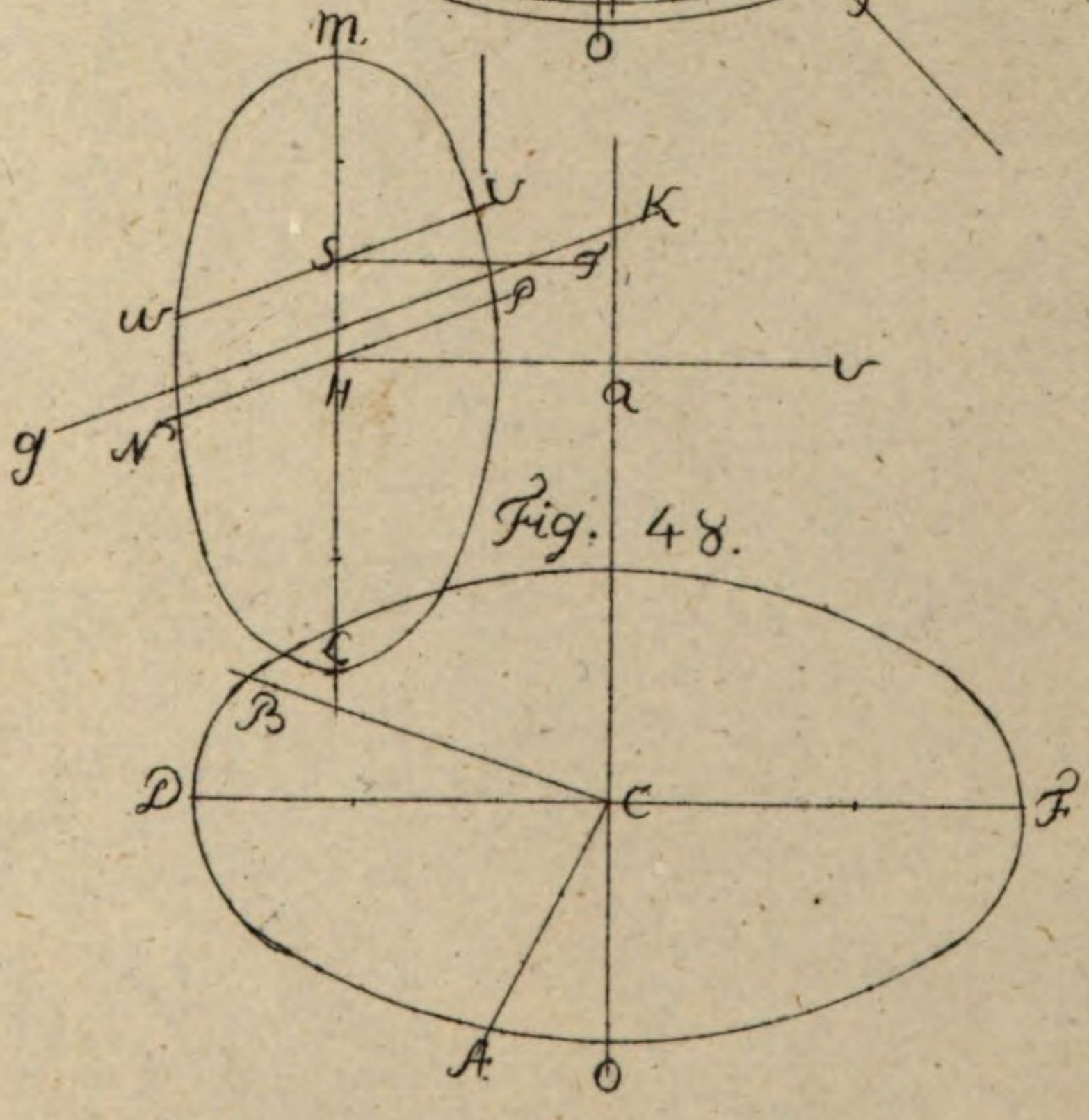


Fig. 48.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Späth, Johann Leonhard,

Die höhere Geodäsie

Bd.: 1. (1816)

München 1816
Bibl.Mont. 3661-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10723368-7